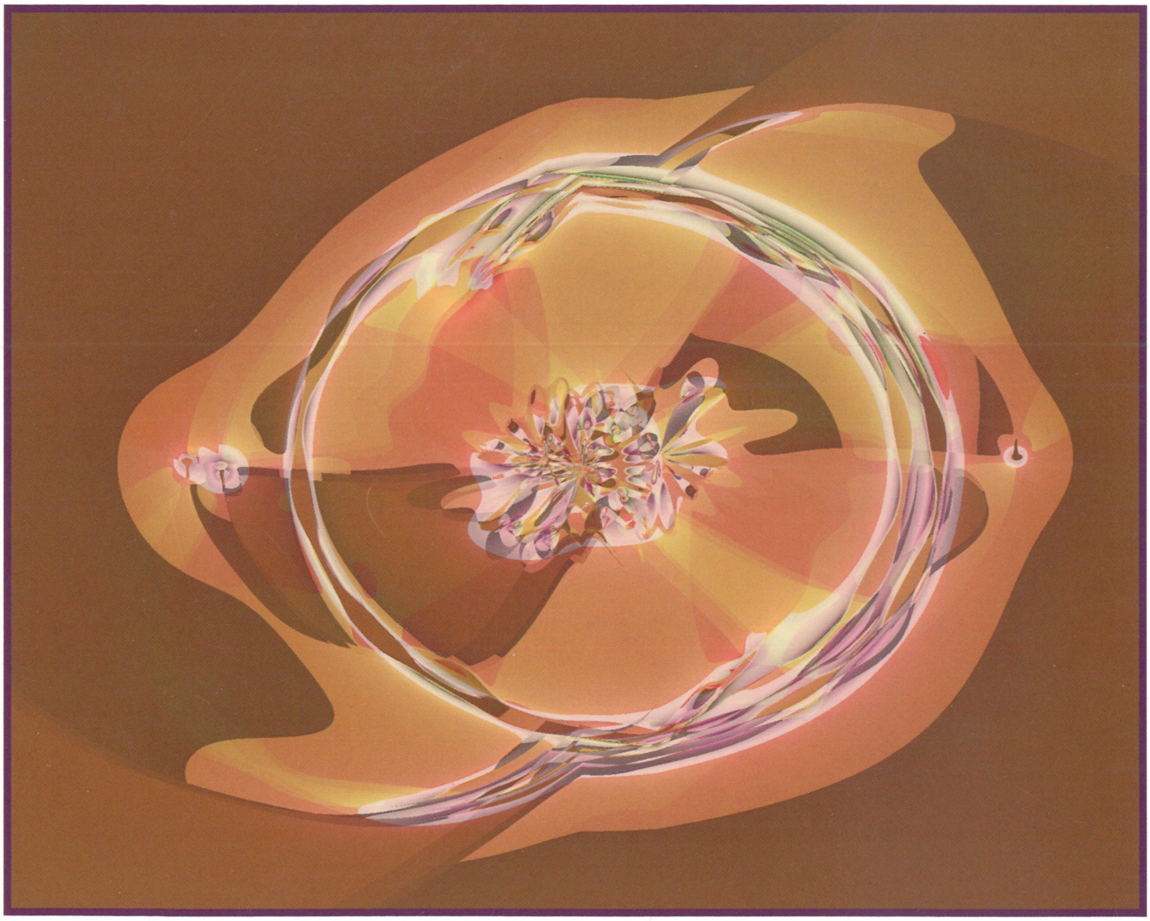
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2011年12月1日発行　第49巻12号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

12
2011

特集 物理と仮説
論理的考察を進めるために



No.582

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 582 December 2011

物理と仮説

論理的考察を進めるために

表紙：戸川　隼人

December 2011 MATHEMATICAL SCIENCES Number 582

特集／物理と仮説

巻頭言

細 谷 暁 夫

仮説という言葉はいろいろな重みで使われている．

比較的軽いもので，刑事コロンボの常套手段がある．完全犯罪をもくろむセレブに対して「これは仮説に過ぎないんですがね」と言って，とっかかりを作る．まず仮説を立て，反証があれば頭を掻いてケロッとして別の仮説を立てる．次々と仮説を繰り出して，自信過剰のセレブを自己矛盾に追い込んで行く．

この特集で扱った記事のうちで，数学上の仮説はコロンボのやり方と対極にあり，ほとんど確かであるが証明が未だできていないものを言うようである．その代表がリーマン仮説（予想）であろう．数学の場合，仮説と予想は近いものがあるが，仮説はそこからさらに豊富な帰結がある場合に言う場合が多いのかも知れない．

実数の連続体仮説については，私自身，藤田博司さんの記事から学ぶところが多く，連続体仮説自体に微妙な部分がまだあることを知った．

物理学上の仮説にはレベルがもっといろいろある気がする．ニュートンが「われ，仮説を作らず」と言ったときにはレベルの違いを見ないといけないことが，荒船次郎さんの丹念に書かれた記事から読み取れる．多分，万有引力についてのデカルトたちによる「渦説」のような仮説は立てない，ということなのだろう．一方では，ニュートンの第一法則では慣性系の存在を仮定している（『プリンキピア』にそれが書いてあるかどうかは意見が分かれるが）．そもそも，仮説を立てずに経験事実だけから理論を構成することなどできないということは，黒川信重さんの記事のポアンカレの『科学と仮説』に書かれている通りである．「渦説」と同類の仮説が「エーテル仮説」であるが，これも佐藤文隆さんによれば，歴史の中では「熱素仮説」と同様の「歴史的ゴタゴタ」ということになるのだろう．これらはむしろ「モデル」と呼ぶべきものかも知れない．古い世代向きにいうと，武谷３段階説の真ん中の「実体論」に分類される，と言ってもよいだろう．

実験については，まずポアンカレを引用しよう．「先入見をすっかり無くして実験しなければならないとは，よく人のいうことである．それは可能でない，それはあらゆる実験に結果を生まないようにさせるばかりでなく，人になし得ないことを欲するものである.」藤本眞克さんは，変位電流と電磁波の検証から始めて一般相対論の検証までの仮説の実験的検定を解説しておられる．現在の実験物理における仮説にもレベルがいろいろある．コロンボレベルのことは実験家ならば日常のことであろう．一方，重力波の存在については間接的な証拠もあり，疑う人はほとんどいない．その点の確信の度合いはリーマン仮説級である．一方，吉

田直紀さんの記事にあるダークマターになると，その存在については天文学的な間接証拠はたくさんあり，ほぼ疑い得ない．しかし，その正体となると分かっていない．今，神岡のサイトで進んでいる実験は，ある素粒子理論のモデルにおける仮説の検証であり，そのモデルが否定される可能性もある．

物理の場合に，ごく最近までは最終的に実験が仮説を判定するのであったが，超弦理論はそもそも原理的に反証可能になっているのだろうか，あるいは実証も反証もできないニュートンの「慣性系の存在」のようなものなのだろうか？ 超弦理論に動機づけられて提案された宇宙モデルとしての「ブレーンワールド仮説」のほうは，石原秀樹さんによれば重力波などを使って原理的に可能であると言う．その議論において，地球の半径を推定した古代エジプトのエラストテネスの方法は示唆的である．夏梅誠さんの明快な解説「ホログラフィー原理」には，ある空間の中身の物理と表面の物理は対応しているという．この仮説を認めると物理の広範な分野において，多くの興味深い予言が可能になる．この仮説が検証可能などうかについては読者の感想を待ちたい．また，中尾憲一さんの，よく整理された記事にあるように，「宇宙検閲官仮説」によれば，ブラックホールの特異点はその地平面に囲まれていて外からは見えない．この仮説からブラックホールに関する重要な諸命題が証明されている．その検証はあるとしても理論的なものであろう．この仮説は，特異点定理とともに，重力の量子論へ進む重要な出発点である．一方，北原和夫さんの記事によれば統計力学にあるエルゴード仮説は測度的不可分割性を仮定すれば証明できる．しかし，孤立系に対してエルゴード性が成り立っても熱力学との距離はあるようで，熱力学の奥の深さを感じさせられる．

優れた仮説を立てることは，それを証明することよりも大事で労力に値する．それが足りないことが，現代科学の課題なのかも知れない．また，それは業界によって立てられた仮説であるべきでなく，知性の担い手である個人が心血注いで立てる仮説でなくては命も輝きもないという佐藤文隆さんの言葉は重い．アインシュタインの 1905 年の特殊相対性理論は，引用文献なしであることからも見て取れるように，業界の流れとは別個の全くの個人による仮説の否定である．私はその日本語訳を一年生のゼミの教材に使っているが，簡単明快で一年生たちでも，ほぼ内容を理解する．面白いことに，アインシュタインの原論文にある操作的なやり方でローレンツ変換を導く教科書は希である．20 世紀の理論物理が，このあたりから道を踏み外したのかも知れないと，ふと思う．

今の時代の物理学にこそ，仮説を果敢に立てて自然に迫る必要があるのだろう．そのためには 19，20 世紀の原子物理学の著しい展開が参考にある．『だれが原子をみたか』の著者である江沢洋さんの記事はそれを力強く描いていて圧巻である．それを読みながら，量子力学の創始者プランクが空洞放射に関する 4 篇の論文を発表して，電磁場のエネルギーの関数としてのエントロピーの仮説を立て実験に合わなければ捨てる作業を続け，赤外領域のデータの改良が決め手となってプランクの公式に到達し，その解釈からエネルギー量子のコンセプトが得られた事実を思い出した[1)]．先人たちの自然に肉薄する執念は学ぶべきものがある．少なくともコロンボ並にはなりたいものである．

今回の企画は，八杉満利子さんが見抜かれたように，読者を仮説を梃に科学全体を俯瞰することに誘うものであったが，意図は達せられただろうか？

参考文献

1) 小長谷大介，「Max Planck の熱幅射研究の方法的意味」，『技術文化論叢』第 3 号，2000 年．
http://www.histec.me.titech.ac.jp/course/

（ほそや・あきお，東京工業大学大学院理工学研究科）

物理における仮説の役割

実験の立場から

藤本 眞克

1. はじめに

「仮説」を広辞苑で引くと，「自然科学その他で，一定の現象を統一的に説明しうるように設けた仮定．ここから理論的に導きだした結果が観察や実験で検証されると，仮説の域を脱して一定の限界内で妥当する真理となる．」とあるように，物理学の研究において（限界はあっても）真理に近づこうとするときには，仮説の前提となる現象や仮説から導かれる予想を実験や観測で検証することが非常に重要である．

筆者には物理学全般を見通して適切な仮説検証実験の例を解説する能力はないので，本稿では筆者の研究分野である重力波や一般相対論に関係する検証実験をいくつか紹介する．

はじめに，歴史的に有名な仮説の**検証実験**を 2 つ取り上げてみよう．

2. 変位電流と電磁波：ヘルツの実験

電磁気学は，19 世紀前半になされた電気や磁気に関する様々な法則の発見を集約し数学的な定式化をおこなったマクスウェルにより 1864 年に完成したとされている．

電磁気学の基本法則を表現した**マクスウェル方程式**は 4 個の微分方程式の形で与えられ，それぞれの式の物理的な内容は，厳密性を多少犠牲にした言い方をすると，(1) 電荷のまわりに電界が生じること（ガウスの法則），(2) 磁気単極子が存在しないため磁束線は必ず閉じていること，(3) 磁界が時間的に変化すると電界が発生すること（ファラデーの法則），および (4) 電流と電界の時間変化（「**変位電流**」と呼ばれる）から磁界が生じること，である．

(2) の磁気単極子が存在しないことは経験的な事実として採用されている仮説であり，(4) の「変位電流」は，定常電流の磁気作用を表したアンペールの法則を時間変動する場合に拡張して電荷の保存則を満たすように一般化するためにマクスウェルが導入した仮説の一つである．この項の導入でファラデーの法則が磁界と電界を交換しても成り立つことになり，電磁現象の対称性が良くなった．

変位電流の存在によってマクスウェル方程式から**波動方程式**が導かれ，**電磁波**の存在が予言された．さらに予言された電磁波の伝播速度が光速度であることや電気の単位系と磁気の単位系をつなぐ換算係数に光速度が関係していることから，光も電磁波の一種であるとの推定もされた．

マクスウェルの予測を裏づける実験的検証が求められる中で，最初に電磁波の存在を実験的に証明したのはヘルツで，マクスウェルの理論から 23 年後の 1887 年のことであった．ヘルツは**火花放電**によって電磁波を発生させ，それを小さい間隙を持つループ状の導体線で受けると間隙に火花放電が発生することを示したのである（図 1）．火花放電の際に電磁誘導の効果では説明できないほど

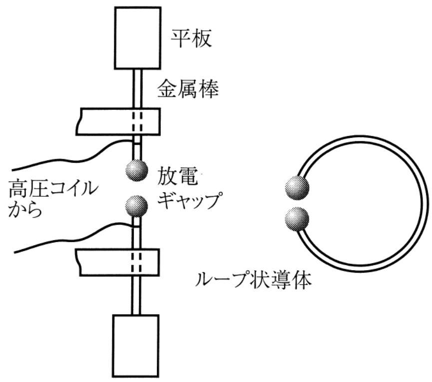


図 1　ヘルツの実験のセットアップ(http://people.seas.harvard.edu/~jones/cscie129/nu_lectures/lecture6/hertz/S_p11.gif). 電波発生装置（左）と受波装置（右）.

遠くでも金属の接触時に火花が飛ぶ現象が観測されており，火花放電から電波らしきものが出ているらしいことは既に知られていた．ヘルツの成功の鍵となったのは，ループ状導体の間隙をマイクロメータで変化させて火花放電が生じる最大間隙長を測ることで，電波の強さが計測できたことである[1]．ヘルツはこのことを利用して，電波発生装置の放電ギャップを構成する 2 つの金属小球に金属棒と平板もしくは球の導体をつなぐと，受波される電波が強くなることを見出し，さらにその発生装置からの電波受信でもループ状導体の長さを変化させると受波される電波の強さ（火花放電する間隙の長さ）が急に大きくなるループの長さがあること（共振）も発見した．このような増幅効果で感度が増した受波器（**ヘルツ共振器**）で発生電波の（波の）節の間隔を測ることにより，電波の波長が測定され，発生装置の金属棒がインダクタンスとして働き，平板がコンデンサーの役割をして，それらで決まった共振周波数付近の電波が放出されていることも分かった．

電磁波が光と同種であるとすると，光と同じように直進性，反射，屈折，偏波といった性質を持つはずである．ヘルツはこれらについてもそれぞれに，遮蔽用導体板，反射板，プリズムを用いたり，受波器のループの向きを変えたりして，実験で確認している．はじめの電波発生装置では波長がおよそ 6 m の電波が出ていたため，実験室で用意した各素子のサイズが波長に比べて大きいという条件を満たさなかったが，発生装置の平板を小型化して共振周波数を上げることで約 10 分の 1 の波長の電波を発生させることで，光と似た性質を持つことが確認できたのである．

3. エーテル仮説：マイケルソン・モーリーの実験

電磁気学の体系化が進むにつれ，それまでのニュートン力学に基づく力学的な世界観の中に電磁気学をどう組み込むかが問われることになった．力学ではいわゆる**ガリレイの相対性原理**が成り立ち，互いに等速で運動している座標系の間は**ガリレイ変換**で結ばれ，どの座標系でも運動方程式の形が同じであった．ところがマクスウェル方程式はガリレイ変換に対して不変な形になっておらず，マクスウェル方程式が成り立つのは特別の慣性座標系（**絶対静止系**）に限られる．そこで，電磁気の現象にはエーテルと呼ばれる媒質が介在しており，エーテルに対して静止している系を絶対静止系と考えた．これが**エーテル仮説**である．

エーテル仮説が正しいとすると，エーテルに対して運動していれば光の速度もその運動（速度）の影響で変化することになるため，運動の変化に伴う光の速度の変化を測ろうということになった．

マイケルソンとモーリーは，地球の公転運動によって地上で測った光の速度が変化するだろうと考え，その変化を**マイケルソン干渉計**で測ろうとした．マイケルソン干渉計は光源からの光を直交する 2 方向に分け，それぞれの方向の先にある鏡で反射して戻ってきた光が再結合してできる干渉光の強度や縞の位置の変化を測るもので，2 方向の光路差の変化が光の波長を基準にして精度良く測れる装置である．物理実験等でマイケルソン干渉計を組んでみると分かるように，鏡の調整やちょっとした振動で干渉縞は変化するため，安定な干渉縞を観測するのは簡単なことではない．数年間の装置改良の後，彼らは光の経路を折り返して光路

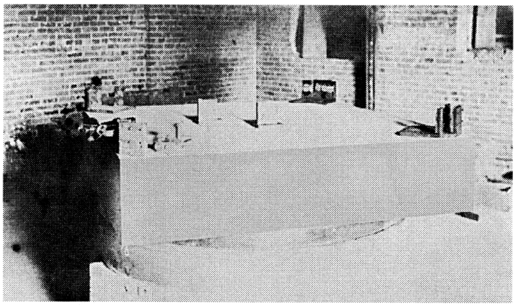


図 2　マイケルソンとモーリーの実験で使用したマイケルソン干渉計 (http://e-ducation.net/scientists/Michelson_Morley_intf.gif).

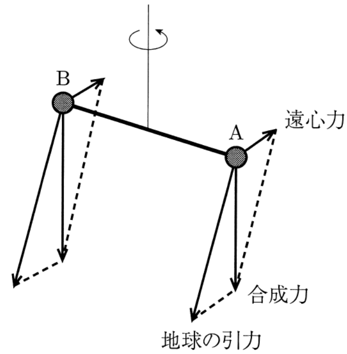


図 3　エトベッシュの実験の原理.

長を 22 m にすることで干渉縞の変化を増幅させた装置を重い石の台の上に組んで全体を水銀に浮かせ (図 2), 装置をゆっくりと回転させながら干渉縞の位置の変化を測定した. また, 年間を通して測定することで, 地球のあらゆる運動方向について観測した. Na の D 線 (波長が約 590 nm) を光源とする彼らの装置で, 光路長の差が最大で波長の 4 割ほどずれることが期待されたが, 実測された結果は波長の 1%以下というものであった[2]. エーテル仮説を否定するこの結果は, 最終的には**特殊相対論**で説明が付くことになる. (本特集にエーテル仮説と特殊相対論についての解説がある.)

特殊相対論によって慣性系の座標変換がガリレイ変換から**ローレンツ変換**に変わったが, これにより電磁気学の法則でも相対性原理が成り立つことになった. マイケルソン・モーリーの実験は, 相対性原理という仮説の肯定的な検証の一つと考えられるのである.

4. アインシュタインの等価原理：その検証

一般相対論はアインシュタインによって 1916 年に完成された重力の理論であり, 重力を時空間の歪がもたらす見かけの力 (慣性力) とする幾何学的理論である. アインシュタインが理論構築の基礎としたのは, 今日「アインシュタインの**等価原理**」と呼ばれるもので, 重力によって**自由落下**している観測者には重力の影響は全く感知されず, すべての物理法則は重力がない場合と同様に成り立つという仮定である. この原理は, 重力による加速度が物体によらないとする「弱い等価原理」, 自由落下する一つの局所慣性系での実験結果はローレンツ変換で結ばれた他の局所慣性系でも成り立つ「局所ローレンツ不変性」と, 局所慣性系での実験結果はいつ, どこでやっても同じという「位置不変性」の 3 つの仮定から導けることが示されている.

アインシュタインの等価原理からは重力の理論はメトリック理論に限定されるという結果が導かれており, 現在まで検証に耐えて生き残っている重力理論は一般相対論を含めてすべて, 時空間の幾何学が計量 (メトリック) で記述できるメトリック理論である[3].

弱い等価原理の検証実験として, 歴史的に有名なのはガリレイのピサの斜塔での落下実験であるが, ニュートンは振り子の等時性 (振り子の周期が重りの材質や質量によらず振り子の長さで決まる) を使って 1000 分の 1 の精度を得ている. より精度の高い検証実験は 1896 年のエトベッシュによるもので, 細い紐で吊るされた棒の両端に種類の異なる物体を取り付けた**ねじれ秤**のねじれを測る方法である (図 3). それぞれの物体には地球の重力の他に地球の自転や公転運動による加速度 (慣性力) が働くので, **慣性質量**と**重力質量**の比が物体によって違えば合成力が平行でなくなり, ねじれの力が働く. 小さなトルクに反応するねじれ秤と光てこによる角度変化の精密測定によって, エトベッシュは 1 億分の 1 の精度で弱い等価原理を

検証した．その後，同じ原理に基づく検証実験が様々なグループによって精度を高める工夫をしながら行われており，現在は3兆分の1以下まで確かめられている．

ローレンツ不変性の検証実験としては，先に述べたマイケルソン・モーリーの実験があり，電磁波の伝播速度の等方性が調べられた．ブリレとホールは1979年に，光源として単色性が良く位相の揃った**レーザー**を用い，さらにマイケルソン干渉計の直交する腕部分に**ファブリ・ペロー共振器**を挿入して光路長を実効的に延ばす方法を採用して，1億分の1以下の精度で等方的であることを検証した．また1960年頃にヒューズとドレーバーによって独立に行われた**核磁気共鳴**を用いたリシウム原子核の遷移スペクトルの観測からは，原子核を構成している陽子の慣性質量の非等方性についての上限値が求まり，強い相互作用，弱い相互作用，電磁相互作用のそれぞれについて20桁以上の非常に高い精度で等方性が検証されている．ローレンツ不変性の検証は特殊相対論の検証と直接結びつくもので，高エネルギー素粒子の反応や寿命の測定などで加速器実験や宇宙線研究，高精度の原子時計の相互比較などで日常的にも行われている．今後も新技術による精度の向上やエネルギー領域の拡大などが行われる度に，検証し直されることであろう．

位置不変性の検証の一つに，**重力赤方偏移**がある．アインシュタインは一般相対論の証拠として検証すべき効果の一つに重力赤方偏移を上げ，太陽表面からのスペクトル線が太陽の重力によってずれる効果を観測するよう提案し，ポツダムや日本にアインシュタイン塔（写真）と呼ばれる太陽スペクトルの観測施設が作られたが，効果を観測することはできなかった．1960年代前半にパウンドらは核ガンマ線の**メスバウアー効果**を利用して，22 m の高度差でのガンマ線の周波数差を測定して1%以下の精度で偏移を確認した．その後，原子時計の発達に伴い，ロケットや航空機さらにはGPSのように人工衛星に搭載した原子時計の進み方が測定されるようになり，重力赤方偏移の効果は検証というより補正すべきものと考えられている．地上でも設置場所の重力ポテンシャルの差による時計の進み方の違いを補正する必要があることが認識されている．例えば，現在開発中で実用化が待たれる**光格子時計**の精度が 10^{-18} になると，地上の 1 cm の高度差による重力赤方偏移の大きさと同じになるため，世界各地の時計を比べるためには正確な等ポテンシャル面（ジオイド）の知識が必要となり，逆に地球の重力ポテンシャル測定に利用される可能性もある．話が検証から外れたが，このような高精度の時計ができれば位置不変性の検証に利用できることは言うまでもない．



写真1　国立天文台三鷹構内にあるアインシュタイン塔の外観．「国登録有形文化財」に指定されている．

時間的な位置不変性については，重力以外の物理法則に現れる物理定数が宇宙年齢スケールで一定であるとする仮定である．微細構造定数や陽子と電子の質量比の時間変化については，アフリカの天然原子炉でのアイソトープ比の異常や遠方のクエーサーのスペクトル観測から上限値が得られており，変化は100億年でも100万分の1程度以下である．

以上のように，3つの仮定ともに精度の差はあるものの肯定的に検証されており，今後の検証の余地は残されてはいるが，一般相対論の理論的な基礎となる前提は現状では正しいものと考えられている[4,5]．

5. 一般相対論：予言と検証

アインシュタインは時空間の幾何学を記述するメトリック（計量テンソル）が重力源となる物質によってどのように決定されるかを表す**アインシュタイン方程式**を提案し，1915 年に一般相対論が完成した．アインシュタイン方程式は計量テンソルの時空座標での 2 階微分までを含む非線形の微分方程式であるが，慣性空間を表すミンコフスキー計量も重力源がない場合の特解として含まれ，さらに重力が定常的で十分弱い場合にはニュートンの重力場が従うラプラス・ポアソンの方程式になる．そこで，重力が弱く速度も光速度に比べて小さいとして近似的にアインシュタイン方程式を解くと，**ポスト・ニュートン近似**の計量テンソルが得られ，それに対する測地線方程式で運動も記述される．

アインシュタインは，この近似法を太陽のまわりの天体の運動や光線の運動に適用して，惑星の公転軌道で近日点が前進する効果や，太陽の周辺を通過する光線が曲がる効果などを導き，水星の**近日点移動**が説明できること，光線の曲がる角度が予言できることを示した．太陽からの光の重力赤方偏移についても予言し，これらを一般相対論の 3 つの検証テストとしたが，前述したように重力赤方偏移は理論の基礎部分の仮説に関係したものであり，検証もかなり後になってなされた．**光線の屈折効果**が 1919 年の日食時にエディントンらによって確認されたことは，一般相対論の正しさを世界中に印象づけた．アインシュタインは一般相対論の最終形にたどりつく前に半分の屈折角を導いていたが，これは特殊相対論にニュートン重力を考慮することで得られる項であり，重力場による周囲の空間の歪の寄与を考慮すると 2 倍になるのであった．

太陽系での検証テストとして，その後重力場による電磁波の**伝播時間の遅れ**が指摘され，第 4 のテストとされた．光線の曲がりや伝播時間の遅れの効果は，太陽系内の探査機との交信電波の利用や遠方クエーサーの超長基線干渉計（VLBI）観測

などにより検証が続けられ，最近の結果では１万分の１から 10 万分の１の精度で一般相対論の予言が正しいことが示された[5)].

6. 重力波：その検証に向けて

アインシュタイン方程式から導かれる予言の中で，現在までに検証されていないのが，**重力波**である．より厳密に言えば，既に重力波発生は間接的に検証されているが，直接的な検出や偏波，伝播速度などの測定による波としての検証がまだなされていない．

間接的検証は，連星**パルサー** PSR1913+16 からの電波パルスの精密な到着時刻測定とその解析を用いて行われた．パルス到達時刻の時系列データには，地球の自転と公転による観測点の位置変動，パルサーのパルス周期やその時間変化率，連星の軌道要素と近星点移動や連星内でのパルスの伝播時間の遅延の影響などが含まれており，長期間の時系列データを用いてそれらの各項を分離して決定することができる．一方の星の視線方向の運動情報だけからは，近星点移動や伝播遅延などの相対論的効果がなければ，連星のそれぞれの星の質量を分離して決めることはできないが，これらの相対論的効果が測定できる場合にはそれぞれの効果に対する各星の質量の依存性が違うことを利用して，それぞれの星の質量を決定できる．ここでは一般相対論を検証すべき対象とするのではなく正しい理論だとして質量などの決定に利用したのである．そうして得られた各星の質量と連星の軌道要素をアインシュタイン方程式から求められた重力波放出に関する公式に代入すると，連星の公転運動エネルギーの減少率やそれに対応する**軌道周期の減少率**が計算できる．この理論的予想値が観測から得られた軌道周期の減少率と誤差範囲で一致したことが，重力波発生の間接的証拠とされている[6)].

重力波を直接検出によって検証しようとする場合，電磁波の実験的検証のときのように実験室で発生し受信することは絶望的である．その理由は電磁気力に比べて重力の作用が極端に弱いためである．しかしながら，重力が**累積的**に増加するのに対して，電気力は正負の電荷で**中和**し打ち消し合いが起こるため，天体スケール以上では重力の影響が支配的になり，強い重力波の発生も期待できる．重力波の検証において発生源として天体を考えるのは自然であるが，検出可能な大きさと周波数の重力波発生が期待できる天体現象は，超新星爆発，ブラックホールや中性子星などの衝突と合体など，いつ，どこで起こるか分からない突発現象であり，発生源の制御はもとより予測すら困難である．受信側は検出に必要な高感度を維持しながらいつ発生するかも知れない短時間の突然現象を長期間ひたすら待ち続ける必要がある．

アインシュタインが重力波の存在を予言して間もなく１世紀になろうとしており，直接検出の試みが始まってからでも半世紀が経過したが，現在ようやくあと一歩で重力波の直接検出が実現するところに来ている[7)]．重力波検出の手段として期待されているのが，巨大で高感度なレーザー干渉計による探査運転である．重力波検出用のレーザー干渉計の基本構成（図 4）はエーテル仮説の検証で使われたマイケルソン干渉計である．重力波は潮汐的な時空間の歪が周期的に変化しながら横波として伝わるため，マイケルソン干渉計の直交する腕の一方が伸びると他方が縮み，半周期後には伸び縮みが逆転する．マイケルソン干渉計では両腕の光路長の差が周期的に変わるのを干渉光の変化として検出するので，重力波の検出には好都合

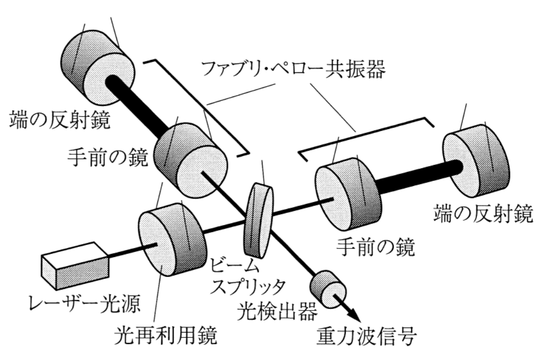


図 4　重力波検出用レーザー干渉計の標準的な構成．

である．両腕の光路長を実効的に増やして重力波による光路長差を拡大するため，両腕の手前側にも鏡を設置して端の反射鏡との間でファブリ・ペロー共振器として動作させる．干渉計の鏡はそれぞれの位置で自由落下（すなわち局所慣性系に静止）しているのが理想的で，地上でも水平方向の自由落下を実現するため，鏡は振り子のように吊り下げられる．さらに，干渉計の出力光は両腕からの光が干渉によってほとんど打ち消されている状態に保たれる．すると重力波信号のような両腕の差は出力に現れるが，入射するレーザー光が持つ雑音は両腕で共通なためほとんど打ち消されて出力の信号を汚さない．さらに，干渉計から戻って出てきたレーザー光は大部分入力側に戻るので，途中に置かれた鏡で反射させ，新たにレーザーから入射されるレーザー光と位相が揃うように調整して，再び干渉計の入射光として再利用できる．この**光再利用技術**で実効的に干渉光計測に利用する光パワーが増え，ショット雑音と呼ばれる計測雑音を（信号に対して）下げることができる．

このような干渉計が，2000年頃からTAMA300（日本，基線長300 m）を筆頭に，GEO600（独英，600 m），LIGO（米2カ所，4 km＋2 kmと4 km），VIRGO（伊仏，3 km）と運転を始め，重力波探査を行なって来たが現在まで重力波は未検出である．現在最高感度を有するLIGOの4 km干渉計で検出可能な重力波は，約1億光年かなたで発生する連星中性子星の合体からの重力波（地上での強度を空間の相対歪で表すとおよそ10^{-22}）である．一方，これまでに発見された連星中性子星の数から予想される合体の頻度は1つの銀河あたりで1万年から10万年に1回程度なので，1億光年までの範囲でも1年間の観測中に合体が発生する確率は1%から10%程度である．確実な検出のために，観測期間を数百年にするのは現実的でないので，感度を約7倍にすることで探査可能距離を約7倍にして探査範囲（体積）を数百倍にするという作戦で，LIGOとVIRGOがそれぞれ改良計画をスタートさせ，我が国では神岡の地下に基線長3 kmで低温に冷却した鏡を持つレーザー干渉



図5　建設が始まったLCGTのイメージ図（東京大学宇宙線研究所提供）．岐阜県神岡の鉱山の地下に設置される．

計（LCGT：大型低温重力波望遠鏡）（図5）の建設が最近始まった[8]．それぞれ，鏡の大型化，レーザー光のパワー増，防振性能の強化，鏡の熱振動による雑音の低減，量子ゆらぎ間に相関を持たせることによる量子雑音の低減，などにより高感度化を実現しようとしており，今後5年から10年以内には目標感度に到達し，探査観測が始まる予定である．1年程度の観測でそれらの検出装置が天体からの重力波を検出する可能性は高く，複数の装置で同じ重力波を検出することにより，重力波源の方向決定や重力波の偏波の観測と分離がなされることも可能であり，LIGOの2台とVIRGOおよびLCGT，さらにはLIGOからオーストラリアへの移設が検討中のAIGOを加えた国際観測網で4台以上の装置が同一重力波を観測できれば，重力波の伝播速度も決定できる可能性がある．このようにして重力波の検証は行われるであろう．

電磁波は実験的検証からおよそ100年の間に，我々の日常生活のあらゆる場面で使われる身近なものになり，多くの検証実験でも有効な手段として使われている．重力波はその特徴から身近なものにはなりにくいかも知れないが，天文観測手段としては従来の手段と異なる全く新しい観測情報を提供し，直接観測が困難な宇宙初期や天体現象の中核部などからの情報が引き出せるので，他の観測手段と相補的な役割を果たしつつ，独自の観測対象や観測事実の発見で現在の宇宙観や物理学

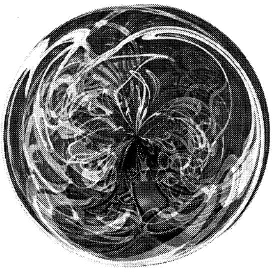
に変革を迫る可能性もある．間近に迫る重力波の検証とその後の発展が楽しみである．

参考文献

1) 徳丸仁：『電波技術への招待』，ブルーバックス，B-350，講談社，1978 年．
2) R. シャンクランド，『現代物理の世界—I 相対性理論と量子力学の誕生』第 6 章，講談社，1972 年．
3) 藤本眞克，数理科学，No.**347**, p.66 (1992).
4) クリフォード・M・ウィル：『アインシュタインは正しかったか？』，松田・二間瀬訳，TBS ブリタニカ，1989 年．
5) C.M. Will, *Living Rev. Relativity*, **9**, (2006), 3. [Online Article]: http://www.livingreviews.org/lrr-2006-3.
6) 藤本眞克，数理科学，No.**371**, p.55 (1994).
7) 中村卓史，三尾典克，大橋正健編著：『重力波をとらえる—存在の証明から検出へ』，京都大学学術出版会，1998 年．
8) http://gwcenter.icrr.u-tokyo.ac.jp/.

（ふじもと・まさかつ，国立天文台）

ダークマターとダークエネルギー



吉田　直紀

岐阜県飛騨市神岡町 旧神岡鉱山跡．超新星ニュートリノを検出して有名になったカミオカンデなど，多くの宇宙素粒子実験施設がある．その地下1000メートルでは，液体キセノンを1トン近く充填した検出器が，宇宙から降り注いでいるはずの粒子を静かに待っている．XMASS（エックスマス）と呼ばれるこの大規模な実験は，宇宙を満たすダークマターの直接検出を目指しており，世界初の成果を挙げると期待されている．最高とされる感度でデータを取り続けており，その中にはダークマターによるシグナルが既に含まれているかもしれない．

「これでじぃーっと待っているわけですか．気の長いいとなみですね.」

私が大学時代の恩師を地上ガンマ線望遠鏡（のモックアップ）に案内したときにいただいた感想である．確かに，天文学や宇宙物理学では望遠鏡を特定の天体に向けたり，観測対象をアクティブに探す研究もあるが，宇宙からたまに飛来する粒子や，起こるであろう現象をただひたすら待つというタイプのものも多い．冒頭のダークマター検出も後者の類である．しかも，期待する反応が起こるかどうかさえ分からない．ダークマターが，多くの研究者が考えているように微視的な未知の素粒子で構成されているならば，何らかのシグナルが検出されるであろう．しかしそうでない可能性も少なからずある．ダークマター直接検出の可能性は，宇宙はダークマターで満たされているとして，そしてそれらは未知の素粒子で構成されているという仮説の上ではじめて期待できる．

銀河などの光輝く天体が生まれるには，はじめに星間ガスなどが互いに重力を及ぼし合い，一カ所に集まってくることが必要となる．ところがその重力の源となる物質のほとんどは，我々がよく知っている水素や酸素，炭素といった通常の元素ではなく，正体不明の物質であると考えられている．読者も「暗黒物質」や「ダークマター」あるいは「ミッシングマス」という言葉を聞いたことがあるかもしれない．ダークマターは20世紀前半には既にその存在は議論され，実に80年近くにもわたって天文学の大きな謎として残っている．さらに最近では，宇宙の膨張に大きな影響を及ぼす「ダークエネルギー」というものも発見され，大きな話題となっている．

「正体不明のものが存在するとわかっている」とは何だかとても奇妙な言い方だ．本稿では，現在の宇宙の96パーセントを占める，ダークマターとダークエネルギーという謎について解説していく．

1. ダークマターとは

ダークマターの存在は，特殊な実験や理論モデルから導かれたのではなく，様々な宇宙観測の結果から共通に示唆されている．ほぼ確定的といってよい事柄である．以下にその根拠となる代表的な観測事実を挙げる．

1. 銀河の回転速度が，星々の存在しない外側でも顕著に減少しないこと．
2. 銀河団内の構成銀河の速度分散が非常に大きいこと．
3. 多くの銀河団に見られる重力レンズ現象．
4. 宇宙の大規模構造の形成．

これらすべての観測結果を説明するためには，大量の「重力相互作用をするもの」を持ち出さなくてはならない．上記のいずれも，重力による引力が関わっていることはすぐに分かるが，何らかの形で輝いている，つまり電磁波を放出したり吸収したりする通常の物質（元素）を重力源としても全然足りない．主要な重力源となるべきミステリアスな物質はどうやら電磁波を放出しない「暗黒」の物質であるらしい．

歴史的には，もともとダークマターはいくつか異なる研究の流れの中でその存在を議論されていた．1930 年代にオランダの天文学者オールトは，太陽系近傍のいくつかの星の運動から，我々の天の川銀河の円盤には大きな重力源，星によるものを足し合わせたよりも大きな重力源が必要であると結論づけた．

一方，スイスの天文学者ツビッキーは，髪の毛座銀河団の構成銀河の運動から，猛烈な速度で運動する銀河をつなぎとめておくには，それらの銀河をすべて足し合わせたものよりもずっとたくさんのもの（＝重力源となる物質）が必要であると考えた．この時点ではまだ仮説というよりは，何かがおかしい，という謎として捉えられていた．

ダークマターが再び重要視されたのは 1970 年代である．カーネギー研究所の天文学者ベラ・ルービンは，いくつかの渦巻き銀河の回転速度を測定し，銀河には見えているものよりももっと多くの「何か」があるに違いないと主張した．

また，プリンストン大学のオストライカーとピーブルズは，銀河の力学的進化の先駆的な数値シミュレーションを行い，薄い銀河円盤が安定に存在し続けるためには，円盤を大きくとりかこむ球状の重い器「ハロー」が必要であると結論づけた．

さらには宇宙の軽元素の存在量からも重要な情報が得られた．1960 年代に既に宇宙初期の元素合成の理論計算が行われ，宇宙に存在する水素とヘリウムの量を説明することに成功していた．しかしその計算から推定される物質の密度は小さく，それでは到底宇宙の膨張を引き止めるのに必要な量（これを臨界密度という）にはならないことが分かった．つまり，通常の物質だけだと現在の宇宙はすかすかの宇宙であるということになってしまう．すかすかの宇宙でも特に問題はなさそうに思えるが，宇宙の膨張はそもそも不安定である．宇宙がビッグバン以降 100 億年以上も膨張し続けてきたことを考えると，宇宙は現在ほとんど全く何もない状態で膨張しているか，ぎっしり物が詰まった状態で収縮してすでにつぶれてしまっているかのどちらかでないとおかしいのだ．仮に現在の時点で中途半端な密度（0 でもなければ臨界密度でもない）になっているとするならば，宇宙のごく初期に微妙なさじ加減とでもいうべき働きがあったと考えなくてはならなくなる．我々の宇宙は巧妙な調整のおかげで存在するという仮説は奇妙だ．納得のいく可能性として考えられるのは，宇宙の密度ははじめからきっちり「1」すなわち臨界密度であって，その後の宇宙膨張によってもこの値が変化しない，という場合である．このとき，同時に元素合成の計算結果との整合性を保つには，通常の物質の何十倍もの量の「謎の物質」が存在し，合わせてきっちり「1」になっていると考えるしかない．最近の宇宙論では，普通の物質に加え，ダークマター，ダークエネルギーが足し合わさってきっちり「1」になると考えられている（図 1）．

ダークマターが宇宙にどれほど存在するのか最終的な答えが得られたのはつい最近のことである．宇宙の大規模構造の解析や，宇宙マイクロ波背景放射の非等方性の解析から，現在の宇宙では，エネルギー密度にして 23 パーセントほどをダークマターが占めると判明した．同様の解析から通常の元素は 4.5 パーセント程度であるとも分かっているため，実に宇宙にある「物質」の 8 割以上は謎のダークマターであることになる．

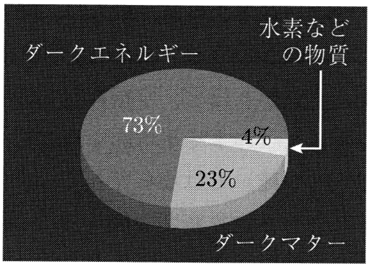


図1　現在の宇宙の構成要素．エネルギー密度に換算し，およそ4分の3ほどがダークエネルギーであり，残り4分の1のほとんども謎の物質ダークマターである．通常の物質は4パーセントほどでしかない（出典：KEK ホームページより．http://www.kek.jp/newskek/2010/mayjun/darkmatter.html）．

2. もしダークマターがなかったら

仮説の検証にはいろんな手法が考えられる．「存在の検証」には，「それがなかったらどうなるか」を考察するのも一つの手であろう．ダークマターのない宇宙を実際に観測することはできないが，コンピューターシミュレーションを行ってその進化を調べることはできる．宇宙の構造形成の標準理論モデルでは，銀河や銀河団などの天体は次のように形成されたと考えられる．ビッグバン後の初期に，ごくわずかだけ物質密度の揺らぎがあり，その揺らぎを種として主に重力により物質分布の偏りが成長し，やがて現在見られるような様々な天体や大規模な構造が形成された．この様子をコンピューターシミュレーションで見てみよう．図2には，ダークマターのある宇宙とない宇宙の進化を比較して示す．宇宙初期の密度揺らぎやその後の宇宙膨張などは同じにしてあるため，ダークマターが構造形成に及ぼす影響を直接見ることができる．

図の左パネルに示された，ダークマターがないモデルでは，137億年たった現在でもはっきりとした構造が何もないことがすぐにわかるであろう．当然ながらそのような宇宙では銀河や惑星系も形成されず，我々人類もダークマターについて思索するということはなかったであろう．

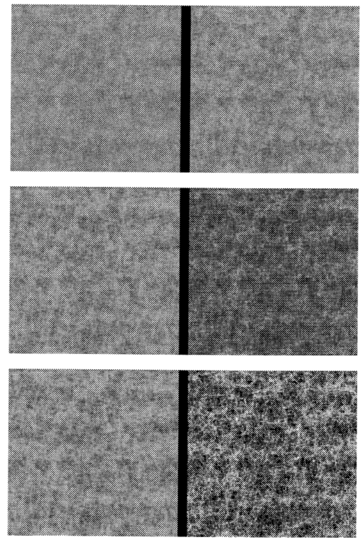


図2　ダークマターがない宇宙（左）とある宇宙（右）における大規模構造の形成．図は，宇宙年齢2億年（上），10億年（中），137億年（下）での物質分布を表している．1辺がおよそ3億光年で，色の明るい部分ほど物質密度が高く，銀河などの天体が密集している．ダークマターがないとそのような場所は137億年たっても存在しない．

一方で，ダークマターがある場合（右パネル）には，宇宙年齢10億年の頃から既に複雑な構造が形成されている．137億年とは非常に長い時間に思えるが，通常の物質だけで天体や構造を作るにはどうにも短すぎるようだ．

大量のダークマターが引力を及ぼし合い，塊を作ることで数十億年という「短期間」に銀河が生まれることができるのだ．

3. ダークマターは「冷たい」？

その存在が確かな一方で，ダークマターがどのような物質なのか，もし微視的な素粒子ならその質量など，具体的なことはほとんど分かっていない．定義上重力以外には他の物質とほとんど相互作用せず，電磁波を吸収あるいは放射することもないため，その性質に関する何らかの情報をスペクトル分光などの伝統的な天文学的観測から得ることは困難である．当然ながら地上で何らかの方

法により検出する，つまり確実にダークマターがあるという証拠を押さえることも難しい．

また，素粒子物理学の理論からはダークマターとなり得る基本粒子としていくつも有力な候補が提唱されているが，いずれも可能性として考えられているにすぎず，未だ決定的な結論・理論予言にはいたっていない．それではやはりダークマターについては本当に何もわかっていないのだろうか．面白いことに，そして奇妙だが，いくつかの性質はおおよそ分かっているのである．さらに宇宙の中での存在量，つまりエネルギー密度に換算して他の要素に比べてどれくらいあるのかということは「正確に」分かっている（図 1）．ダークマターの性質や存在量に関して重要な手掛かりを与えたのは天文観測であり，その観測結果の解釈には構造形成の理論とコンピューターシミュレーションが必要であった．本特集のテーマに沿うならば，宇宙の構造形成の研究ではコンピューターシミュレーションが「仮説の検証」に大きな役割を果たしてきたのだ．

1980 年代以降現在に至るまで，最有力と考えられている宇宙の構造形成の理論モデルは「冷たいダークマターモデル」と呼ばれている．ダークマターが「冷たい」とはどういうことだろう．ダークマターを無数の微視的な粒子であると仮定した場合，宇宙に飛び交うダークマター粒子の速度の分散（乱雑さ）がとても小さい場合に「冷たい」と表現する．これは例えば水の温度と同様に考えればよいだろう．水の温度は，水を構成する分子の乱雑な動きの速度によって定まる．分子の乱雑な動きの速度が小さいと温度が低い，すなわち「冷たい」と表現するのと同じだ．ダークマター粒子の乱雑な動きが小さければ，宇宙初期にはダークマター粒子は周りに対してあたかも「じっと」していたことになる．反対に，ダークマターの乱雑な動きが大きいときダークマターは「熱い」と呼ばれる．さらにダークマター粒子の乱雑な動きの程度によって「温かい」と呼んだりもする．この熱いとか冷たいという性質が，構造形成の観点からは最も重要である．

ダークマター粒子の乱雑な動きは，物質分布を滑らかにする働きをもつ．乱雑な動きが大きいほど，つまり「熱い」ほど，宇宙初期での物質分布はある距離以下（およそ平均的な速度をもつ粒子が到達できる距離）ではならされてしまい，天体形成のもととなる物質密度の揺らぎはそれより大きな波長のものだけが残ることとなる．

ダークマターのこの定義からみれば，ニュートリノは「熱い」粒子に分類される．ニュートリノは実際に存在が確認された素粒子であるために，1980 年代前半までは宇宙の構造形成の主役たるダークマターの有力な候補であった．

その当時，ニュートリノをダークマターの主要素とするモデルに基づいた大規模コンピューターシミュレーションが行われ，観測されるような宇宙の大規模構造が形成されるかが詳細に調べられた．残念ながら，物質分布の進化の詳細な解析から，ニュートリノがダークマターとして宇宙全体の物質密度に大きな寄与を与え，構造形成を支配する可能性は否定された．ダークマターの候補探しは振り出しに戻ってしまったのだ．代わって盛んに研究され，現在最も有力な候補となったのが「冷たいダークマター」と呼ばれるモデルである．ここで強調するが，これまでにそのような物質が実際に直接検出されたわけではない．したがってまだ仮説上の存在である．また，ダークマターは必ずしもある単一の物質や素粒子である必要もなく，例えば質量が小さく光らない天体（例えばブラックホールなど）の集合であってもよい．

構造形成の様子からダークマターの正体に迫る方法について具体的に示そう．冷たいダークマターを基本とした宇宙モデルでは，小さい塊が合体してどんどん大きいものへと成長していく．反対に，ダークマターが熱い場合には，その乱雑な動きが無視できるくらいのとても大きな塊しか形成されない．それより小さな天体は，後にその巨大なダークマターの塊の中で起こる様々な物理的不安定性をもとにしてできると考えられる．この違いは現在の時点での物質分布にも顕著に現れ，図 3 に示したような様子になる．熱いダークマターモデル

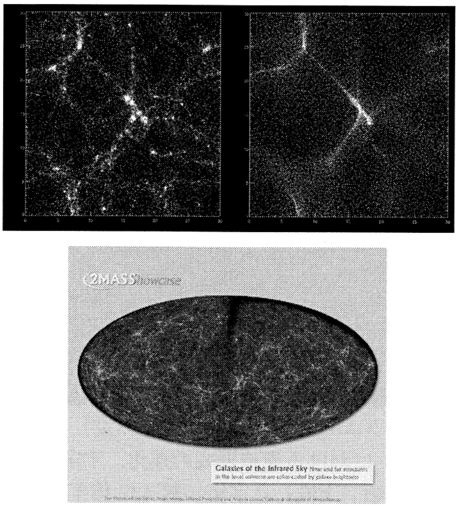


図 3　ダークマターが冷たい場合（左上）と熱い場合（右上）の物質分布．下の図は，2MASS 全天サーベイによって得られた，天球上に投影された銀河の分布．上記の 2 つのモデルのうち，どちらが現実に近いかは明らかであろう (http://pegasus.phast.umass.edu/ipac_wget/gallery/showcase/allsky_gal_col/index.html, Atlas Image mosaic obtained as part of the Two Micron All Sky Survey (2MASS), a joint project of the University of Massachusetts and the Infrared Processing and Analysis Center/California Institute of Technology, funded by the National Aeronautics and Space Administration and the National Science Foundation)．

では，物質分布が全体に滑らかである．一方で，冷たいダークマターモデルでは無数の小さな塊が見られる．図の下に示した，全天の銀河の分布を明らかにした 2MASS サーベイの結果と比べた場合，どちらのモデルがより現実に近いかは明らかであろう．より定量的に（つまり科学研究として），物質分布の相関関数を詳細に比較した研究により，現在では冷たいダークマターモデルが宇宙の構造を極めて正確に再現することが示された．この理論モデルによれば，ダークマターは天の川銀河の中でも無数の小さな塊を作っていることが予言される．太陽系近傍でもダークマター分布は滑らかではなく激しい密度差がある可能性もあり，冒頭で紹介したダークマター直接検出実験に対し重要な示唆を与える．

4. 宇宙膨張を加速させるダークエネルギー

ダークマターと並んで，いやあるいはそれ以上の謎かもしれないのがダークエネルギーの存在と正体である．そもそも重力場の方程式を導いたアインシュタイン自身が，静的宇宙モデルを作るために「宇宙項」なる定数項を重力場の方程式に導入したことはよく知られている．それから数十年後，宇宙を静的に保つどころか，その膨張をさらに加速させる働きをもつ「ダークエネルギー」として復活することになった．

1990 年代後半に，2 つの国際研究グループが多数の遠方超新星を観測し，それらの明るさ，距離，そして赤方偏移を測定するという観測プロジェクトを遂行した．その観測データからは，遠くの超新星は「思ったよりも」ずっと暗く見えることが判明した．なぜかは分からないが，多くの超新星はとても遠くにあるように見えるのだ．ここで「思ったよりも」と書いたのは，宇宙には物質や電磁波しか存在せず，その膨張率が時間とともに減速していく場合よりも，という意味である．

超新星までの距離（見かけの明るさが暗くなる度合い）と赤方偏移（宇宙進化の時間に対応）との関係を詳細に調べて得られた結論は，宇宙は過去数十億年ほどの間に猛烈な速さで膨張していたと考えざるを得ないというものだった．そして宇宙を加速度的に膨張させるものとして考えられたのがダークエネルギーである．

5. ダークエネルギーがなかったら

これまでに，ダークエネルギーに対して何か「物的証拠」が得られたわけではない．したがってこれもまた仮説である．現在の宇宙の構成要素の実に 96 パーセントが厳密には仮説にすぎないというのは何とも残念だが，人類が挑む謎として十分魅力的だとも言えよう．ダークエネルギーは，過去から現在までの宇宙全体の膨張率を増加させるものとして必要と理論的には考えられているが，そんな（変な）ものが本当はなかったらどうなるのだろうか．

純粋な疑問としても興味深い．ダークエネルギーが存在するというのなら，ダークエネルギーの効果を取り入れた構造形成シミュレーションの結果は観測される宇宙の構造とあらゆる面で整合していなくてはならない．さもなくば，宇宙の加速膨張をダークエネルギーの効果以外で――例えば重力理論の変更――で説明するほうがよいかもしれないのだ．

そこで，ダークエネルギーがある場合とない場合では構造形成がどのように異なるのか考察してみよう．2つの場合の違いを明らかにすることでダークエネルギーの働きについてもより理解しやすくなるだろう．ダークエネルギーの働きは，場所によらず均一な斥力を及ぼすだけである．基本的には宇宙の大域的な振舞いである膨張則を変更するだけであり，構造形成に直接影響を及ぼすものではない．しかし，離れたものの間に働く重力は必然と弱くなるので，猛烈に膨張する宇宙の中で構造形成は次第に阻害されてしまう．こうしてダークエネルギーは，宇宙の大規模構造が過去のある時点からどれくらいの速さで進化してきたかを大きく左右することになる（図 4）．ダークエネルギーの効果が卓越すると宇宙が加速度的膨張をはじめ，ものは離ればなれになり，構造形成はそれ以上進まない．つまり現在の宇宙と，少し前（といっても数十億年前）の宇宙の姿があまり変わらないようなら（図 4 の右パネル），ダークエネルギーの効果があったと考えてよいだろう．

6. みえないものを見る

観測的にダークエネルギーの効果を確かめるにはどうすればよいだろう．最近の天文学では，大規模サーベイが一つのトレンドになっている．天空の大きな領域を特定の電磁波波長帯でくまなく掃き（文字通り掃天観測という），様々な天体を発見，観測するとともに，多数の天体の統計や空間分布などを精度良く求める．宇宙の構成要素など，主要な宇宙論パラメータを決定することができる．ダークエネルギーが構造形成の進化に与える影響は，図 4 に見られるように，小さなものである．

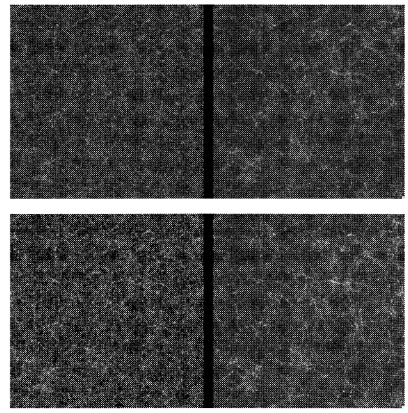


図 4　ダークエネルギーのない宇宙（左）とある宇宙（右）における構造形成の進化．宇宙年齢 70 億年の頃（上段）と宇宙年齢 137 億年，つまり現在の時点（下段）．1 辺が 3 億光年の領域の中での物質分布を表している．ただし，宇宙膨張による空間の広がりは差し引いて表示している．

異なる時点（宇宙年齢）にある多数の天体を観測することではじめてその微妙な差を抽出することができる．ダークエネルギーという，文字通り目にはみえない仮説上の存在を何とか確かめ，正体を明らかにするのだ．

2020 年までに遂行，あるいは開始が予定される大規模なサーベイ計画は世界で複数あり，日本もそのうちのひとつ，すばる超広視野サーベイ計画を主導している．重力レンズ現象を用いてダークマターの分布の進化を探り，また，銀河の大域的分布から宇宙の膨張則を決定することが計画されている．これらの観測によりダークエネルギーの性質を知り，究極的には宇宙の将来について論ずることができるようになるだろう．

現在の標準宇宙モデルは 96 パーセントもの「目にはみえないもの」を含み，はなはだ未完成であると言わざるを得ないが，宇宙（自然）の謎と豊かさを人に教えてくれるようにも思える．

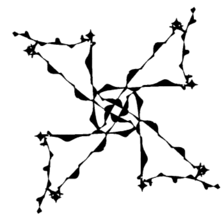
参考文献

1) 岡村定矩編『宇宙はどこまでわかったか？』日本評論社，2010 年.
2) 吉田直紀『宇宙 137 億年解読』東京大学出版会, 2009 年.
3) 村山斉『宇宙は何でできているのか』幻冬舎, 2010 年.

（よしだ・なおき，東京大学数物連携宇宙研究機構）

特集／物理と仮説

ブレーンワールド仮説と宇宙論



石原　秀樹

1. はじめに

宇宙とは，すべてのものと領域を一つのまとまりとして捉えたものである．宇宙はすべてなのだから，“宇宙の外” は存在しない．

宇宙の中の物体の移動は，前後，左右，上下の3方向の移動の組合せによって表される．つまり，私たちは3次元空間に住んでいる．相対論ではこれに時間を付け加え，4次元時空として考える．古く中国では，空間を「宇」，時間を「宙」と呼んでいたようだ．

ここで，時空の基本的な性質として，光の伝播を取り上げよう．

光は波の性質をもつから，その媒質として “エーテル” を考えるのは自然である．光の波が伝播する速度は，それを測定する系の “エーテル” に対する相対速度に依存するはずであるが，マイケルソン–モーレイの実験は，あらゆる慣性系で真空中を伝播する光の速度は一定であることを明らかにした．

アインシュタインは，“エーテル” というようなものは存在せず，光は何もない真空の中を伝播する，また，真空の性質は，空間的な一様・等方で，互いに等速運動するあらゆる慣性系に対して同じである，と考えた．

数学的な道具立てとしては，真空の時空の距離が，三平方の定理を拡張した

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

で与えられるミンコフスキー時空を考える．便利のために，これを計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$ を用いて

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu=0,1,2,3} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と表そう．この距離は，時間空間の並進，空間回転で不変であることに加えて，時間と空間の間の ‘回転’ に対しても不変である．この ‘回転’ がローレンツ変換であり，慣性系を等速度運動する別の慣性系にうつす変換と同定される．$ds^2 = 0$ を満たすヌル直線で記述される光の軌道は，ローレンツ変換で不変であり，このことが，あらゆる慣性系に対して光速度が不変であることを表現している．

さて，本小文のテーマであるブレーンワールドのアイデアは，「宇宙は全体である」ということと，「光は真空中を伝わる」という，基本的な性質に大きな変更をもたらす．この2つの点について，以下に見ていくことにしよう．

2. 高次元時空と次元低減

超弦理論など，重力を含む量子論の構築を目指す相互作用の統一理論では，理論の無矛盾性から4次元より高い次元の時空が要求される．理論的

な高次元時空と我々の周りで経験される 4 次元時空を調和させるためには，高次元時空から出発して，実効的には 4 次元時空に見えるようなうまい機構が必要となる．これを次元低減（dimensional reduction）と呼ぶ．

2.1 余剰次元のコンパクト化

次元低減機構の有力な候補の一つは，余剰次元のコンパクト化である．例えば，2 次元の平面の一方向を周期的に丸めて筒を作る．この筒をどんどん細くして針金の表面のようにする（図 1）．このような空間は，針金の太さに比べて十分大きなスケールの現象では実効的に 1 次元の空間と認識される．

量子力学では，小さな空間的距離を分解して見るためには，波長の短い高エネルギーの光が必要である．また，周期的な境界条件をもつ方向の運動を励起するためには，周期の逆数に比例したエネルギーが必要である．周期的な空間サイズが実験で用いられるエネルギーのスケールに比べて十分小さければ，その実験では丸められた方向の空間は認識されない．このように，余分な空間次元を小さく丸まったものと考えることによって次元低減を起こす機構を余剰次元のコンパクト化と呼ぶ．このアイデアは古く，カルツァとクラインによる重力と電磁気の統一理論にその起源をもつので，カルツァ–クラインコンパクト化とも呼ばれている．

現在の高エネルギー実験では，時空は 4 次元であることと矛盾がない．そためには，余剰次元のサイズには，現在得られている最高エネルギーから制限がつき，10^{-17} cm より十分に小さい必要がある．

2.2 ブレーン宇宙

これに対して，ブレーン宇宙という新しい次元低減の機構が提案された[1]．

まず，4 次元より高い次元の時空を考え，その中に埋め込まれた膜を考えよう．仮に，すべての物質場と物質間の相互作用を媒介する力の場が，この膜の上に拘束されて外には存在できないとしたら，膜の外に余分な次元の空間が存在するとしても，我々にはそれを認識する術がない．この膜を membrane からの造語 brane（ブレーン）と呼び，全体の高次元時空を bulk（バルク）時空と呼ぶ（図 2）．高次元の存在が認識できないならば，それは全く仮想的なもので，物理的には意味がない．しかし，一般相対論では，距離の定義された時空は重力場として力学的な自由度をもつ．時空を考えることは重力場を考えることと同義だから，重力場だけは高次元のバルク時空にも存在することになる．重力を通してブレーンとバルク時空は関係していて，重力を通じてのみ，余剰次元の存在が検証可能となるのである．このようなルールの宇宙モデルがブレーン宇宙モデルである．

重力場だけを特別扱いした，いわば，ご都合主義的なブレーン宇宙モデルは，超弦理論の D-ブレーンから示唆される．D-ブレーンは超弦理論に現れる一種のソリトンで，開いた弦の端点はブレーンに垂直な方向には動けず固定される．このように開いた弦に対して，固定端境界条件であるディリ

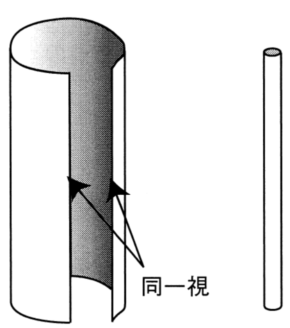


図 1　余剰次元のコンパクト化．

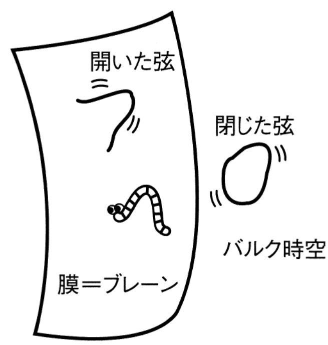


図 2　ブレーンと弦．

クレ (Dirichlet) 境界条件を与える膜がD-ブレーンの名の由来である．開いた弦はブレーンに沿った方向にだけ自由に運動できるが，閉じた弦は端点をもたないから，D-ブレーンにとらわれることなく自由にバルクを飛び回る．超弦理論では，開いた弦は物質場とゲージ場およびそれらのパートナーたち，閉じた弦は重力場とそのパートナーたちを記述するので，物質と電磁気力，弱い力，強い力のゲージ場はブレーンの上だけに存在し，重力場だけがバルクにも存在できる，そんなブレーン宇宙の可能性が超弦理論から示唆される．

D-ブレーンの研究の背景，動機などについての解説は，過去の本誌特集や別冊にも優れたものがあるので，そちらも参照していただきたい[2)]．

万有引力の逆2乗則は空間次元が3次元であることからきている．一般に n 次元空間の1点を囲む $(n-1)$ 次元球面の表面積は半径の $(n-1)$ 乗に比例する．ニュートンの万有引力は，静電場のガウスの法則と同じく，力の源を囲む球面を貫く力線の数が保存することから，力の大きさは $r^{-(n-1)}$ に比例する．3次元空間の重力は逆2乗則，n 次元空間の重力は逆 $(n-1)$ 乗則となる．

惑星の運動やキャベンディッシュの実験で，重力の逆2乗則が確かめられているのだから，空間は3次元であることが結論される．たとえブレーン宇宙を考え，物質と重力以外の相互作用を用いただけでは余剰次元の存在が分からないとしても，重力を用いれば，たちどころに空間が3次元であることが結論される．

しかし，余剰次元がコンパクト化されていたらどうなるであろうか．1点を囲む球面は，コンパクト化された方向にはつぶれているから，余剰次元は遠方では面積の増加には寄与しない．ゆえに，重力の距離依存性は，遠方では広がった次元の数によって決まる．空間が n 次元でも，$(n-3)$ 次元がコンパクト化されていて広がった空間次元が3次元であるなら，余剰次元のコンパクト化のサイズより大きなスケールでは，実効的に逆2乗則が得られる．ただし，もし，コンパクト化のサイズより近距離の重力の実験をしたら，重力の法則は逆 $(n-1)$ 乗則になる．

実は，重力の実験はそれほど近距離で行われていないので，コンパクト化のサイズに対する実験的な制限はとても緩く，0.1 mm のオーダーまで許される可能性がある．余剰次元のコンパクト化という意味では，カルツァ–クラインコンパクト化と同じ考えであるが，重力の実験から要求されるサイズは，物質やゲージ場の実験から要求されるコンパクト化のサイズに比べて遥かに大きい．このアイデアをきっかけにして，高次元の古典的重力場についての研究が盛んになった[1)]．

ブレーンが実体のあるものならば，それ自身エネルギーをもつはずである．相対論によれば，エネルギーは時空を曲げる．ランドールとサンドラムは，ブレーンがバルク時空を曲げる効果を考慮したブレーン宇宙モデルを提案した[3)]．

5次元のバルク時空として負の宇宙定数をもつアインシュタイン方程式の解である反ド・ジッター時空を考え，そこに空間的に3次元に広がったブレーンが埋め込まれているとする．エネルギーはブレーンの上だけにあるので，バルク時空をブレーン上で急激に折り曲げることになる．このことを考慮すると，ブレーン上にはミンコフスキー計量が誘導され，ブレーンは我々の認識する現実的な4次元時空のモデルになり得ることが示される．また，バルク時空が負の曲率をもつために，余剰次元のサイズが無限に大きくても，ブレーン上には逆2乗の万有引力が得られることが示される[4)]．

このモデルでは，ブレーン上には近似的に一般相対論が誘導されることが示され[5)]，ブレーンを用いた膨張宇宙モデルなど，多くの研究がある．

3. ブレーンワールドの宇宙像

ブレーンワールド仮説において最も衝撃的なことは，我々の住む宇宙は“すべて”ではなく，これと同様な宇宙が多数存在しても良い，ということである．

天動説で宇宙の中心であった地球は，地動説によって惑星運行の主役の座から引きずり降ろされ

た．我が太陽系の中心である太陽も天の川銀河の中ではその周辺部を回る恒星の一つにすぎない．我が宇宙の中には無数の銀河があり，さしずめ，銀河ワールドの様相をなす．ブレーンワールド仮説は，我々の住む宇宙はバルク時空に浮かぶ数多くのブレーン宇宙の中の１枚にすぎない，という宇宙像を導く．他のブレーン宇宙を感知することは，バルクに存在できる重力場を使ってのみ可能になる*1)．

4. ブレーンの特性

ブレーンワールド仮説では，光はブレーンの上に拘束されており，バルク時空の中の真空領域を伝わることはできない．このことは，「ブレーンというものが光を伝える媒質である」，と考えられることを意味する．このことは，かつて，光の媒質としての“エーテル”の存在を否定したことと矛盾しないのであろうか？

ここで，物質としてのブレーンの基本的な性質を見てみよう．今，ブレーンは一般的に空間 p 次元に広がっているとしよう．ブレーンの運動は，バルク時空中の $(p+1)$ 次元の世界面 Σ として表される．図 3 はブレーンの世界面 Σ がバルク時空に埋め込まれた様子である．物質の密度，運動量，応力は 2 階の対称テンソルであるストレステンソル

$$T^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} T^{00} & T^{0j} \\ \hline T^{i0} & T^{ij} \end{array}\right) \tag{1}$$

$$(\mu, \nu = 0, 1 \cdots, p; \quad i, j = 1 \cdots, p)$$

で記述される．このテンソルの成分は

$$T^{00} = \text{エネルギー密度},$$
$$T^{0j} = \text{運動量密度}, \quad T^{ij} = \text{応力} \tag{2}$$

という意味をもつ．

*1) もし，2 枚のブレーンが衝突することが起これば，そこではブレーン上の物質場を激しく励起するような現象が起こるに違いない．これが初期宇宙の熱いビッグバンだという提案もある．

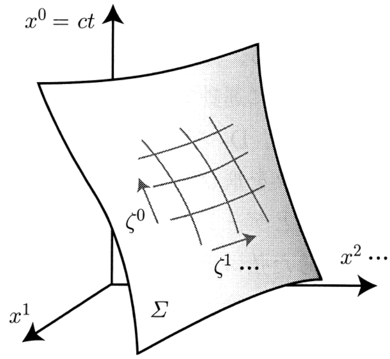


図 3　ブレーンの埋め込み．

もし，ブレーンが幾何学的なオブジェクトで，その物性を特徴づけるようなものがないとすると，ストレステンソルを表すものは Σ 上の計量テンソル $\gamma^{\mu\nu}$ だけが候補となり，$T^{\mu\nu} = -\sigma\gamma^{\mu\nu}$ と表される．ここで σ は保存則より定数でなくてはならない．ブレーン上の任意の 1 点の周りの小さな領域では，計量テンソルはミンコフスキー計量 $\eta^{\mu\nu}$ の形になるので，ブレーンのストレステンソルもミンコフスキー計量に比例した形

$$T^{\mu\nu} = -\sigma\eta^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} \sigma & 0 \\ \hline 0 & -\sigma\delta^{ij} \end{array}\right) \tag{3}$$

になっている．これよりブレーンは，一様なエネルギー密度 σ と一様で等方的な張力 σ をもち，エネルギー密度と張力の大きさは等しいことになる．

張力のある物体はその（超）面積を小さくしようとするから，ブレーンの運動方程式は，作用積分をブレーンが運動したときに掃く世界面の面積

$$S = \int_\Sigma \sqrt{-\gamma}\, d\zeta^0 d\zeta^1 \cdots d\zeta^p \tag{4}$$

と選び，これを極小にすることから得られる．ここで，γ は Σ 上の計量 $\gamma_{\mu\nu}$ の行列式，ζ^μ は Σ に張られた座標である．積分の中の $\sqrt{-\gamma}\, d\zeta^0 d\zeta^1 \cdots d\zeta^p$ が Σ 上の座標の選び方に依らない $(p+1)$ 次元不変面積要素である．$p=1$ のとき，この作用積分は南部–後藤のストリング作用積分であり，$p=0$ のとき，相対論的粒子の作用積分になっている．これらは，一般に空間的に p 次元に広がる物体に

対する，幾何学だけから決まるもっとも単純な作用積分で記述されるオブジェクトである．

ブレーンの世界面の一点を指でつまんで世界面に垂直な方向に引っ張ると世界面が変形する．ところが，つまんだ指を世界面に沿って動かしても世界面は変形しない．世界面上の座標の網目が変形するだけである．座標 ζ^{μ} の張り替えで作用積分は不変だから，ブレーンはその世界面に沿った運動に意味がない．

このことは，ブレーンのストレステンソルが計量に比例していることと合致している．ブレーン上に何もないとき，計量はミンコフスキー計量となるが，ブレーンの世界面に沿った変換では，並進，回転，ローレンツ変換のいずれに対してもこの計量は不変である．ローレンツ変換を施しても，運動量は励起されず，エネルギー密度も張力も変化しない．つまり，ブレーンは止まったままと同じである．ブレーンに垂直な方向にだけ運動が励起される．

特殊相対論では，光は空っぽの真空を伝播する，真空は等速運動している別の慣性系で見ても不変である．空っぽのものが動いて見える慣性系はない．ブレーンはそれ自身エネルギーをもっているにもかかわらず，ブレーンに沿った方向には動かすことができない．ブレーンは，自分に沿った方向，つまり，我々の住む宇宙の次元に関しては，まるで空っぽのように振る舞うのである．

ブレーンという膜のこのような性質は，我々の身の回りの膜，例えば石鹸膜やゴム膜などとはたいへん異なる．身の回りの膜は，膜に沿って運動させればもちろん運動量をもつ．膜に沿って伸び縮みさせてやれば，面密度が小さくなったり大きくなったりする．

石鹸膜やゴム膜のエネルギー密度は静止エネルギー mc^2 の密度が張力に比べて，圧倒的に大きい．ブレーンではエネルギー密度と張力が同じ大きさであり，このことがブレーンと身の回りの膜の大きな相違点である．エネルギー密度と張力が同じ大きさであるということゆえ，特殊相対論の真空と同じように，ブレーンは光速度を不変にす

るような媒質たり得るのである．

ブレーンの空間次元を増やしていって，バルク時空の空間次元と同じになってしまうと，ブレーンはバルク時空を埋め尽くしてしまうことになる．このときのストレステンソルはバルク宇宙の宇宙定数と同じものになる．つまり，相対論的点粒子，南部–後藤ストリング，いろいろな次元のブレーン，宇宙定数に ‘満たされた’ 時空，これらは一つのファミリーをなしている．ブレーンとは部分空間だけに宇宙定数があるようなものであると言うこともできる．

5. ブレーンワールド仮説の検証

大地とも呼ぶ我々の地球は，宇宙の中ではゴマの一粒にも満たないようなものだった．ブレーンワールド仮説によれば，我々は，バルク時空に浮かぶ１枚のブレーンの上に住んでいる．我々の住む宇宙は，時空の中の一粒の粒子にも例えられよう．あるいは，大海の中の泡沫の表面か．我々の住む宇宙はその小さなものの中にすっぽり収まっていると言うのだ．

この大胆な宇宙モデルは，物理学における理論的な仮説にすぎない．本当にこの自然界がブレーンワールドになっているかどうかは，検証されるべき課題である．ブレーンの外に飛び出せるのは重力場しかないので，ブレーンワールドの検証は重力と関連する現象を用いてするほかはない*2)．

さて，地球表面が曲がっていることはどうやって知ることができるであろうか．１つの方法は，地表に三角形を描いて内角の和が 180 度からずれているかどうかを見ればよい．地球が球面なら，三角形の内角の和は 180 度より大きくなる．このずれは地表の曲率を与えるが，三角形を描くことや角度を測ることは地表面内での操作だから，この曲率は内的曲率と呼ばれる．

*2) 時空が高次元であることを調べるために，小さなスケールで万有引力の逆 2 乗則からのずれを検出する試みや，加速器中で高次元ブラックホールの生成を調べる試みがなされている．また，ブレーンワールドモデルによる宇宙背景輻射の揺らぎの理論的予言が調べられている．

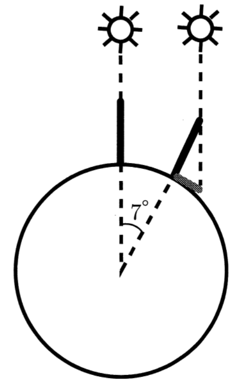


図 4 エラトステネスの実験．

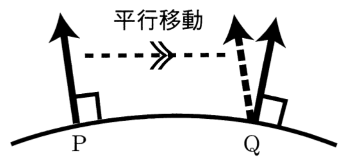


図 5 外的曲率．

一方，地表の曲がりを調べるために三角形など描かなくても，地表の外から眺めれば，その曲がりは一目でわかる．

紀元前 3 世紀頃，エジプトのエラトステネスは，夏至の正午に，ナイル川沿いの南方の地シエネで垂直に立てた棒に影ができないことを知り，同じ日の正午にアレクサンドリアで垂直に立てた棒の影を用いて，地表面の曲率を推定した．その原理は，図 4 を見れば理解できる．

図 5 のように，3 次元空間の中にある 2 次元曲面を考えよう．この面上の 1 点 P に垂直な単位ベクトルを立て，それを空間の中で，面上の別の点 Q まで平行移動する．このベクトルと点 Q での垂直な単位ベクトルとを比べると，面が曲がっているときはずれが生じ，ずれが曲面の曲率を与える．ここでは，垂直ベクトルを立てるときとベクトルを平行移動するときに，面内の 2 次元以外の次元の存在を用いる．だから，ここで測る曲率は外的曲率と呼ばれる．エラトステネスの行ったことは，まさに，地表面の外的曲率の測定だった．

相対論的な宇宙論では，宇宙に存在する物質のエネルギーにより時空が曲がり，それが宇宙の膨張を説明する．曲がった時空の中に住む我々が認

識する曲率は内的曲率であり，それはアインシュタイン方程式によって規定される曲率である．もし，我々の住む宇宙がブレーン宇宙であるなら，外的曲率もあるはずだ．ブレーンから外に出られない我々が外的曲率を測ることができるだろうか？

エラトステネスは，地表面の外からやってくる太陽の光を用いて地表面の外的曲率を測った．この太陽の光にあたるのは，ブレーン宇宙では，バルク時空を飛び回る重力波である．重力波を用いてブレーン宇宙の外的曲率が測れれば，ブレーンワールドの決定的な検証となろう[6]．

最後にもう一度惑星の運動に戻ろう．天動説では天球に投影された惑星の複雑な運動を説明することはできなかった．そこで，奥行きという新しい次元を加え，周転円なるものを導入して説明を試みた．一方，地動説では，やがて，奥行きも含めた3次元空間での惑星の位置を正しく認識することによって，惑星の運動は，ニュートン力学によるケプラー運動として，物理学で理解された．さて，我々の住む4次元宇宙に新たな次元を付け加えることによって，宇宙に対する認識はどのように発展していくのであろうか．

参考文献

1) N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G.R. Dvali, *Phys. Lett. B* **429**, 263 (1998); I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G.R. Dvali, *Phys. Lett. B* **436**, 257 (1998).
2) 「スーパーストリング」, 別冊・数理科学 2005 年 10 月.
3) L. Randall, R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4690 (1999).
4) J. Garriga and T. Tanaka, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2778–2781 (2000).
5) T. Shiromizu, K. Maeda and M. Sasaki, *Phys. Rev. D* **62**, 024012 (2000).
6) H. Ishihara, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 381–384 (2001).

（いしはら・ひでき，大阪市立大学大学院理学研究科）

実数の連続体仮説

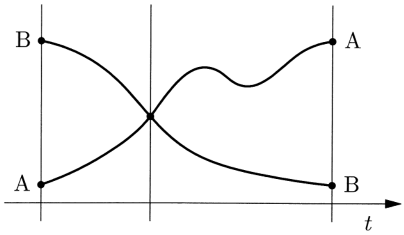


藤田 博司

1. 数直線の完備性

実数の全体である数直線の特徴が正しく認識されるようになったのはようやく19世紀の後半になってからだ．数直線の最大の特徴である**完備性**の必要性が認識されるには，変化と運動の数学である微積分学が確立され，さらにはその基礎を論理的に整備しようという機運が高まるのを待たねばならなかったからだ．

物理的な運動の数学的モデルとして，直線上を移動する動点AとBを考えよう．



2つの動点が一定の時間のうちにお互いの位置を交換したとすれば，線分上で両者が同じ位置を占めている瞬間があるはずだ．直線や時間の拡がりをグラフで表現したとき，2つのグラフが交差するところには，交点が存在するはずだ．こうした常識的な判断を支える数学的な性質が数直線の完備性である．数直線の完備性は「有界な集合は最小上界をもつ」あるいは「有界な単調数列は収束する」というワイヤストラスの原理や，カントールによる区間縮小法の原理，「実数のコーシー列は収束する」という原理など，様々な表現をもつ．例えば $\sqrt{2}$ や黄金比や π のような数論的にみて欠くべからざる定数は言うに及ばず，“これからコインを投げて定められる実数” のような予測不可能なものまで含め，すべての可能性に，数直線はあらかじめ備えている．それが数直線の完備性である．そこには**可能性の全体が数学的対象として一挙に与えられ得る**という信憑が潜んでいる．集合論が，この信憑に裏付けを与えてくれる．そこで，実数論と無限集合論には切っても切れない深い関連がある．実際，カントールはフーリエ級数の研究から無限集合論に導かれたのだし，**実数の無限は自然数の無限より真に大きい**というカントールの定理にしても，初期の証明は区間縮小法によるものであり，名高い対角線論法による証明も，完備性を暗に用いている．

2. 連続体問題

実数の無限，すなわち**連続体の濃度**は，自然数の無限すなわち**可算濃度**より真に大きい．それは実際どれくらい大きいのだろう．どんな無限集合も，可算集合の基数 $\aleph_0$ から出発する**アレフ系列**

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \cdots < \aleph_n < \cdots < \aleph_\omega < \cdots$$

のどこかに位置づけられる．アレフ系列は無限集合の基数（要素の多さという意味でのサイズ）を小さい順に数え上げる，いわば無限集合のモノサ

シの役割を果たしている．このアレフ系列における連続体の濃度の位置を明らかにすること，という**連続体問題**に対して，カントールは，連続体の濃度は $\aleph_1$，すなわち，可算でない無限集合のうち最小であろう，と予想した．この予想をカントールの**連続体仮説**と呼ぶ．連続体の濃度は，可算無限集合の冪集合の濃度 $2^{\aleph_0}$ に等しいことがわかっているため，連続体仮説は $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ という簡潔な式で表現される．

後のゲーデル，コーエンらの研究によって，連続体の濃度は $\aleph_1$ であっても $\aleph_2$ や $\aleph_3$ であっても，その他かなり広い範囲の基数のいずれであってもよく，通常の集合論ではどれか一つに決められないことがわかった．これが**連続体仮説の独立性**である．カントールほどの人がその時代の数学の知見を総動員しても，連続体仮説の真偽を決定することができなかった理由は，この独立性にあった．

3. 仮説としての連続体仮説

連続体の濃度が $\aleph_1$ であるという仮説が通常の集合論と独立であるということは，この仮説が通常の数学の枠外にあることを意味するが，裏を返せば，公理としてこの仮説を改めて数学に持ち込んで差し支えない，ということでもある．この「仮説としての連続体仮説」から導かれる奇妙な命題をいくつか紹介しよう．定理1と定理2の証明は参考文献1) で読める．

定理1　複素平面 $\mathbb{C}$ 上の正則関数の可算でない集合 $\mathcal{F}$ で，どの $z \in \mathbb{C}$ についても値の集合 $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ が可算となるようなものが存在する．□

定理2　単位正方形 S 上の関数 $f(x,y)$ で，すべての x について可算個の例外を除くほとんどすべての y で $f(x,y)=0$，すべての y について可算個の例外を除くほとんどすべての x で $f(x,y)=1$ となるようなものが存在する．□

このような2変数関数 $f(x,y)$ については，すべての x で $\int_0^1 f(x,y)dy = 0$，すべての y で $\int_0^1 f(x,y)dx = 1$ となるから，累次積分の順序交換が成立せず，また二重積分 $\iint_S f(x,y)dxdy$ が存在しない．

定理3　ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ を可算個の部分集合 $C_1, C_2, \ldots$ に分割し，各部分集合が，XY両軸に平行な辺をもつどんな長方形の4頂点も決して含まないようにできる．□

有限個の部分集合への分割では，決してこのようなことは起こらない．また，分割された各 C_n にルベーグ可測性などの追加の性質を要求すると，このような分割は作れなくなる．

このような奇妙な関数や集合の存在を導く連続体仮説は「間違っている」という印象を持たれるかもしれない．確かに連続体仮説やそれに類する何らかの仮説なしでは，こうした奇妙な関数や集合の存在を証明することはできない．一方，それらが存在しないという証明も通常の数学の枠内では不可能である．

連続体仮説のような独立命題について，もしも「正しさ」の議論を求めるならば，数学的な対象の性質の自然さというものを上手にすくい上げ，自然な結果を導く仮説を見つけ，さらにその正当性を確立する，という営みが要求されるだろう．数理論理学の一専門分野として現在も研究が続けられている集合論には確かにそのように動機づけされている部分が少なからずある．将来こうした研究の延長線上で，連続体問題に決着をつける自然な仮説が見出されるのかもしれない．

参考文献

1)　渕野 昌，構成的集合と公理的集合論入門，田中一之編『ゲーデルと20世紀の論理学』第4巻（東京大学出版会，2007年）所収．

（ふじた・ひろし，愛媛大学大学院理工学研究科）

ホログラフィー原理仮説と弦理論

夏梅 誠

1. はじめに

「ホログラフィー原理」は，超弦理論の分野で盛んに議論されている考えである．通常のホログラムは，2 次元面に 3 次元の映像が記録されているが，ホログラフィー原理は

ホログラフィー原理：d 次元の量子重力理論は，1 次元低い $(d-1)$ 次元の自由度の理論で表される．

と主張する．この考えはトホーフトやサスカインドによって提唱されたが[1)]，いまだ決着のついていない量子重力理論を定式化する上でカギになるかもしれないと考えられている．本稿では，ホログラフィー原理へと至った歴史的な道のりをたどり，その原理の実現例として **AdS/CFT 双対性**と呼ばれる考えを紹介する．

2. ホログラフィー原理の手がかり 1：ブラックホール・エントロピー

ホログラフィー原理の第一の手がかりは，ブラックホールから得られた．通常のシュワルツシルド・ブラックホールの場合，地平面の半径は[*1)]

$$r_0 = \frac{2GM}{c^2} \tag{1}$$

で与えられる．地平面の半径はブラックホールの質量 M に比例するので，物質がブラックホールに落ちこむと地平面の面積 $A = 4\pi r_0^2 = 16\pi G^2 M^2/c^4$ は増大する．また，古典論的にはブラックホールからは何も出てこない．したがって，地平面面積は減ることのない量であり，これは熱力学のエントロピーを思い起こさせる．したがって，

$$S_{\rm BH} \propto A? \tag{2}$$

という関係が推測される．実は第 2 法則に限らず，ブラックホールの性質は熱力学の法則と同じ形でまとめることができる（第 0〜第 3 法則）．例えば，

$$dM = \frac{1}{2M} dM^2 \propto \frac{1}{M} dA \tag{3}$$

となるので，M^{-1} が温度とみなせれば，式 (3) は熱力学の第 1 法則 $dE = TdS$ にほかならない．実際，1974 年ホーキングは物質場の量子効果によって，ブラックホールが黒体放射を起こし，その温度は

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_{\rm B}} \tag{4}$$

で与えられることを示した．この温度を使うと，式 (3) と同じ議論で $S_{\rm BH}$ の比例係数が求まる：

$$\boxed{S_{\rm BH} = \frac{A}{4G\hbar} k_{\rm B} c^3 = \frac{A}{4 l_{\rm pl}^2} k_{\rm B}.} \tag{5}$$

$l_{\rm pl} := \sqrt{G\hbar/c^3}$ はプランク長さと呼ばれる長さの単位で，重力の量子効果が大きく効きはじめる長

*1）以下では，$c = \hbar = k_{\rm B} = 1$ の単位系を主に使うが，この節ではすべてあらわに書く．

さと考えられている*2)．

微視的には，エントロピーは系の自由度を数える尺度である．**ブラックホール・エントロピー** $S_{\rm BH}$ は何の自由度に相当するのだろうか？ ブラックホールが重力場によって作られることを考慮すると，ブラックホール・エントロピーは重力の自由度を数えていると想像される．しかし，エントロピーは本質的に量子力学的な量であり，エントロピーを正当化するには量子力学が必要である．したがって，ブラックホール・エントロピーを「説明」するには，量子重力が必要なはずであり，実際式 (5) に $l_{\rm pl}$ が現れることからも，このことがわかる．

また，ブラックホール・エントロピーの大きな特徴は，それが地平面の「面積」に比例する点である．これに対して統計力学的なエントロピーは，系の「体積」に比例しなければいけない．この違いが，ホログラフィー原理のそもそもの発端である．つまり，量子重力理論は，通常の統計力学系と比べ1次元低い次元の自由度をもつことを示唆する．

3. ホログラフィー原理の手がかり2：強い相互作用と弦理論

ホログラフィー原理の第二の手がかりは，一見まったく関係のなさそうに思われる分野から来た．ブラックホール熱力学の問題とほぼ同じ頃に発展していた**強い相互作用**の分野である．

陽子や中性子は，クォークと言う，より基本的な粒子からできている．しかし，クォークは通常は陽子や中性子の中に閉じこめられており，ばらばらに取り出すことはできない．このクォークどうしを結びつけている力が，強い相互作用である．強い相互作用の理論は，量子色力学（QCD）によって記述される．しかし，強い相互作用は文字通り強い力であり，摂動論の使える領域は限られており，いまだにQCDを非摂動論的に解くのは困難である．

*2) 現実の4次元時空では，$l_{\rm pl} \sim 10^{-35}$ メートル 程度である．

このため近似手法として提案されたのが，トホーフトの**ラージ $\boldsymbol{N_c}$ ゲージ理論**という考えである[2]．そして，この考えが弦理論と関係し，ホログラフィー原理にもつながる．

QCDによると，強い相互作用の担い手はグルーオンである．グルーオンは，$SU(3)$ ゲージ対称性をもつゲージ場であり，$(A_\mu)^a{}_b$ という具合に添字 (a,b) についての 3×3 行列で表される．これを「カラー」の自由度といい，量子色力学の「色」はここから来ている．

ラージ N_c ゲージ理論では，$SU(3)$ ゲージ理論のかわりに，例えば仮想的な $U(N_c)$ ゲージ理論を考える．この場合，ゲージ場 $(A_\mu)^a{}_b$ は $N_c \times N_c$ 行列で表される．この理論には，QCD同様結合定数 $g_{\rm YM}$ があるのだが，とくに $\lambda := g_{\rm YM}^2 N_c$ を大きな値に固定しつつ，$g_{\rm YM}\to 0, N_c\to\infty$ という極限をとる操作を**ラージ $\boldsymbol{N_c}$ 極限**と言う．以下みるように，これはノントリビアルな極限である．つまり，この極限で理論は自由場には帰着しない．実は，有効結合定数が λ で表されるからである．したがって，λ が大きいときは，むしろ強結合極限である．

ゲージ場のラグランジアンは，形式的に

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g_{\rm YM}^2}\{\partial A\partial A + A^2\partial A + A^4\} \qquad (6)$$

と書ける．このようなラグランジアンから，場の理論を使って振幅を求めるためのファインマン・ルールが導けるが，ルールだけをまとめると以下のようになる：

- ゲージ場を矢印つきの二重線で書く（“double-line notation”）．各線が行列の「足」を表し，全体として矢印の向きが保たれるようにダイアグラムを書く．
- 二重線に λ/N_c の因子を付与する．
- 相互作用を表す「頂点」*3)には，N_c/λ の因子．
- 「ループ」には N_c の因子（N_c の自由度があるため）．

*3) 図1ではグレーの丸で表した．なお，以下ではダイアグラムの λ と N_c の因子にだけに注意し，「外線」をもたない「真空ダイアグラム」だけを考える．

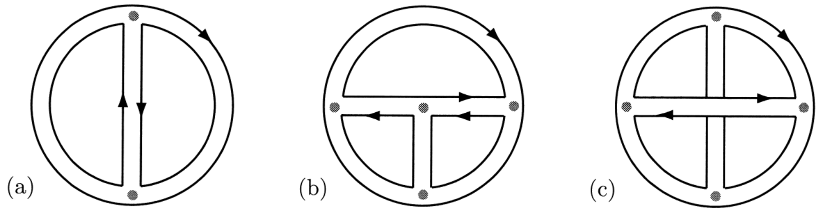


図 1　真空ダイアグラムの例．(a), (b) はプラナーなダイアグラムで，(c) は非プラナーなダイアグラム．

このため，頂点の数を V，二重線の数を E，ループの数を F とすると，

$$\left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^V \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^E N_c^F \sim \lambda^{E-V} N_c^{V-E+F} \quad (7)$$

となる．例えば，図 1(a) のダイアグラムは $(V, E, F) = (2, 3, 3)$ なので

$$\left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^3 N_c^3 = \lambda N_c^2 \ . \quad (8)$$

図 1(b) のダイアグラムは $(V, E, F) = (4, 6, 4)$ なので

$$\left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^4 \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^6 N_c^4 = \lambda^2 N_c^2 \ . \quad (9)$$

したがって，これらのダイアグラムは形式的に

$$(1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots) N_c^2 = f_0(\lambda) N_c^2 \quad (10)$$

という形にまとまる．

しかし，ダイアグラムはいつも式 (10) の形をとるわけではない．例えば，図 1(c) のダイアグラムは $(V, E, F) = (4, 6, 2)$ なので

$$\left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^4 \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^6 N_c^2 = \lambda^2 \quad (11)$$

となる．図 1(a), (b) のようなダイアグラムをプラナー（planar）といい，図 1(c) のようなダイアグラムを非プラナー（non-planar）という．プラナー（非プラナー）とは，平面上に書ける（書けない）という意味である．非プラナーのダイアグラムも含めると，ダイアグラムは

$$f_0(\lambda) N_c^2 + f_1(\lambda) N_c^0 + f_2(\lambda) \frac{1}{N_c^2} + \cdots \quad (12)$$

という形にまとまる．ラージ N_c 極限では，式 (12) の第 1 項，プラナー・ダイアグラムが支配的になる．

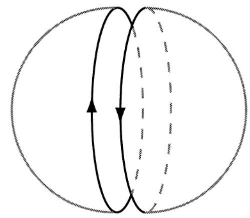


図 2　ダイアグラムと 2 次元面の関係．

ダイアグラムが平面上（あるいは球面上）に書けるかどうかで，ラージ N_c 極限で支配的になるかどうかが決まるというのは，ダイアグラムとトポロジーの関係を示唆する．実際，図 1(c) はトーラス上には書くことができる*4)．

一般には次のように考える．今，二重線を辺として，ループを面で埋めると，2 次元面ができる（図 2）．つまり，2 次元面を（頂点で交わる）辺で分割した図形ができる．こう考えた場合，二重線の数 E，ループの数 F は，それぞれ 2 次元面の辺の数，面の数という意味をもつ．しかし，2 次元面としてみた場合，式 (7) に現れる N_c のベキはオイラー標数 χ であり，トポロジカル不変量である：

$$\chi = V - E + F \ . \quad (13)$$

例えば，球は $\chi = 2$，トーラスは $\chi = 0$ である．ハンドルの数（ジーナス）を g とすると，$\chi = 2 - 2g$ と書くこともできる．

したがって，ダイアグラムが 2 次元面のトポロジーの足し上げとして表されることになる．実は

*4)　これを絵に描くのは，筆者の画力に余るし，見にくい絵になるだけである．読者自らが絵を描いてみるか，実際にハンドルをもつ物体上にダイアグラムを描いてみるのがいい．

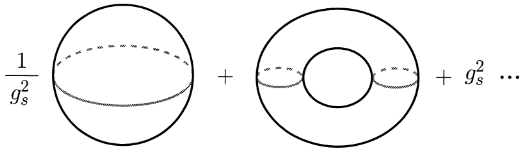


図 3　弦理論のダイアグラムも，摂動論的にはリーマン面の足し上げとして表される．球は古典重力，トーラスは重力の 1 ループに相当する．

弦理論の摂動展開も，2 次元面のトポロジーの足し上げとして表される（図 3）．

本稿では弦理論について詳しく説明することはできないが，弦理論の基本的な物体は粒子ではなく，ストリングである．粒子が時間とともに時空中で世界線を掃くように，ストリングは時空中で 2 次元面，世界面を掃く．このため，弦理論では摂動展開は 2 次元面の足し上げとして表される．図 3 中の g_s はストリングの相互作用の強さを表す結合定数である．また，ストリングには，端のあるストリング（開弦）と端のないストリング（閉弦）があり得るが，このうち閉弦は重力を表すことが知られている．したがって，閉じた 2 次元面の足し上げは，重力の摂動展開に相当する．

以上のことから示唆されるのは,「ラージ N_c ゲージ理論は弦理論で表され，特にラージ N_c 極限では,（弦理論が記述する）古典重力で表される」という結論である．これは驚くべき結論である．もともとの理論はゲージ理論であり，重力を含まないのに，特別な場合には重力理論で表されると主張しているからである．

なお，オイラー標数 χ の 2 次元面に対し，ストリングの結合定数は $1/g_s^\chi$ の形で現れる．これは N_c のベキの形と同じである．また，g_s^2 は重力の相互作用の強さでもあるので，ニュートン定数 G と $G \propto g_s^2$ の関係にある．したがって，これらのパラメーターには

$$g_s^2 \propto G \propto \frac{1}{N_c^2} \tag{14}$$

という関係がつく．

ところが，弦理論を矛盾なく量子化するには，高次元時空が要求されることが知られている．ロー

レンツ対称性 $SO(1,d-1)$ を仮定すると，ボゾンだけを含んだ弦理論の場合は $d=26$，フェルミオンも含んだ弦理論の場合は $d=10$ が要求される．4 次元時空だけの弦理論は無矛盾ではない．つまり，

- ゲージ理論によると，ラージ N_c ゲージ理論は弦理論で表されると主張するが，
- 一方，弦理論はそもそも 4 次元の理論として成立しない．

この 2 つのステートメントは相いれないように聞こえる．

この 2 つのステートメントが実際には矛盾していないことに気づくには，弦理論は重力も含めた理論であることを認識する必要がある．すなわち，弦理論は平坦な時空だけではなく，曲がった時空を解としてもつはずである．そのような曲がった時空を考えることでゲージ理論を表すことができるかもしれない．そして，この曲がった時空自体は高次元時空でも構わない．この時空が $SO(1,d-1)$ 対称性ではなく，$SO(1,3)$ 対称性しかもたなければ，平坦な 4 次元の理論として解釈できるからである．この目的のためには，時空の次元として最低限 5 次元が必要であり，5 次元目の方向が曲がっていることになる．

したがって，ここまでにわかったことをまとめると，

> ラージ N_c ゲージ理論は，4 次元時空のローレンツ対称性 $SO(1,3)$ をもつ 5 次元の曲がった時空で表される．

4 次元のゲージ理論が 5 次元の曲がった時空として表されるということは，逆に言えば 5 次元の曲がった時空が 1 次元低い理論で表されるということである．こうして，やはりホログラフィー原理を示唆する手がかりが出てきた．

4. ホログラフィー原理実現の一例：AdS/CFT 双対性

ラージ N_c ゲージ理論と曲がった時空の関係については，前節の最後に述べたことまではわかっていたが，それ以上の具体化は困難だった．すなわち，弦理論が表すゲージ理論が何なのかはっきりしなかった．つまり，それは QCD に近い理論なのか，それとももっと違う振舞いをする理論なのか，はっきりしない．また，ゲージ理論が表す曲がった時空についてもはっきりしなかった．$SO(1,3)$ 対称性を持つ曲がった時空といっても，それだけでは時空を絞りこむことができない．

しかし 1997 年「AdS/CFT 双対性」という考えにより，これらの問題が一挙に解決し，具体的なゲージ理論と曲がった時空が同定された[3]．まず，弦理論が表すゲージ理論は*5)

> $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論．

次に，弦理論が住む曲がった時空は

> 5 次元反ド・ジッター時空と S^5 の直積．

反ド・ジッター時空 (anti-deSitter space)*6) は，負の宇宙定数をもつアインシュタイン方程式の解で，一様な負の曲率をもつ時空である．この時空は以下の計量で与えられる：

$$ds^2=\left(\frac{r}{L}\right)^2(-dt^2+dx^2+dy^2+dz^2)+L^2\frac{dr^2}{r^2}\,.$$

L は AdS 長さと呼ばれる長さのスケールで，宇宙定数から決まる．この形から明らかなように，この計量は $x^\mu=(t,x,y,z)$ に対する $SO(1,3)$ 対称性を持つ．これが 4 次元時空のローレンツ対称性に相当し，したがって x^μ がゲージ理論の 4 次元部分を表す．

この AdS/CFT 双対性で，ブラックホール・エントロピーの問題に戻ってみよう．AdS_5 時空にもブラックホールが存在する．その場合，ブラックホールの地平面は (x,y,z) 方向に伸びている．したがって，5 次元ブラックホール・エントロピーは (x,y,z) 方向の「面積」に比例する．一方，4 次

*5) $\mathcal{N}=4$ はこのゲージ理論が持つ超対称性の数を表す．$SU(N_c)$ ゲージ対称性の N_c ではないことに注意．

*6) 以下，AdS_5 と略．なお，紙面の都合から，AdS_5 時空と $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論のくわしい説明も，この 2 つが対応する根拠も本稿では省略することにする．

元のゲージ理論は通常の統計力学系であり，そのエントロピーはやはり (x, y, z) 方向の「体積」に比例する．このように，ブラックホールが5次元時空にいるからこそ，ブラックホール・エントロピーが4次元の統計力学的なエントロピーとして自然に解釈できるのである．

具体的には，弱結合で $\mathcal{N}=4$ 理論のエントロピー S_{free} は計算でき，ブラックホール・エントロピーと

$$S_{\text{BH}} = \frac{3}{4} S_{\text{free}} \tag{15}$$

という関係になっている．3/4というファクターはブラックホールの計算，すなわちAdS/CFTでの計算がラージ N_c 極限であり，弱結合ではないことに起因していると考えられる．すなわちAdS/CFTによると，$\mathcal{N}=4$ ゲージ理論のエントロピーは，強結合で弱結合の3/4になることも予言している．

5. 残された問題と歴史的な寄り道

以上のように，AdS/CFTはホログラフィー原理を実現しており，またゲージ理論と弦理論の関係が解決した．しかし，問題のすべてが解決したわけではない．

第一に，ゲージ理論と曲がった時空の立場から残った問題は，QCDに近い理論に対応する曲がった時空は何かである．AdS/CFTが関係づけるゲージ理論は，$\mathcal{N}=4$ 理論やその「親戚」であり，実はQCDとは大きく性質が異なっている．とは言うものの，$\mathcal{N}=4$ 理論とQCDは場合によっては似た振舞いをすることが明らかになっており*7)，クォーク・グルーオン・プラズマの性質を理論的に解明するために，近年盛んに用いられている[5,6]．

第二に，ホログラフィー原理の立場から残された大きな問題は，いかなる量子重力理論もAdS/CFTのようにホログラフィー的に表されるかという点である．AdS/CFTでは，ブラックホールと言っても，AdS時空という特殊な時空を使っている．シュワルツシルド・ブラックホールのような漸近的平坦なブラックホールに対してもホログラフィーによる記述が可能なのか，可能であればホログラフィーは何か，それは我々の知っている通常の統計力学系なのか，などが問題である．

最後に，このような解説ではやや異例かもしれないが，本特集の趣旨から，あえて歴史的なコメントをしておきたい．3節での結論は，1990年代初めにはおそらく多くの人々の間で共有されていたと思われる．さらに歴史をひもとくと，このような考えは，少なくとも1981年のポリャコフの論文にまで遡ることができる[7]．にも関わらず，なぜAdS/CFTが提唱されるのに1997年まで待たなければいけなかったのだろう？

まず理由としてあげられるのは，3節で述べた手がかりだけでは，実際に一組の曲がった時空とゲージ理論を選び出すのは難しい点である．また，今回触れなかったが，AdS/CFTを議論するためになくてはならない「Dブレーン」と呼ばれるテクニックも当時は存在していなかったし，ポリャコフの論文のときは超弦理論すらまだ存在していなかったくらいである．これらが1つ大きな理由だったのは間違いない．事実，Dブレーンが注目を集めたのは1995年だったが，わずか2年後にAdS/CFTは提唱された．

しかし，1990年代初めごろの私自身の心境を思い出してみると，当時はこの対応を十分真剣には捉えていなかったと言わざるを得ない．弦理論が近似的にゲージ理論を記述する点については疑う余地はない．しかし，弦理論と4次元のラージ N_c ゲージ理論が厳密に対応するという意識が多くの人々にあったとは思えない．そういった雰囲気の中で，ポリャコフはこの問題を（よい意味で）執念深く考え続けた一人だったのだろう．AdS/CFTには「GKP–ウィッテン関係式」として知られる重要な式がある[4]．「GKP」は共著論文を書いた3人の頭文字なのだが，「P」がポリャコフである．ポリャコフの名が，このようにAdS/CFTに刻まれたのは，誠に適切なことだと思う．

*7) 例えば，格子数値計算によると，$SU(3)$ ゲージ理論のプラズマのエントロピーも，式(15)に近い振舞いをする．

私たちの誤りはわれわれの理論をあまりに真剣に受け取ることではなくて，われわれの理論を充分真剣に受け取らないことである．

ワインバーグ[8)]

本稿執筆にあたり，原稿を読んでいただいた岡村隆氏（関西学院大学），太田昌宏氏（総合研究大学院大学）に感謝します．

参考文献

1) G. 't Hooft, gr-qc/9310026; L. Susskind, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 6377. [hep-th/9409089].

2) G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B* **72** (1974) 461.

3) J.M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231 [*Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 1113] [arXiv:hep-th/9711200].

4) E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 253 [arXiv:hep-th/9802150]; S.S. Gubser, I.R. Klebanov and A.M. Polyakov, *Phys. Lett. B* **428** (1998) 105 [arXiv:hep-th/9802109].

5) 夏梅誠，数理科学 2006 年 7 月号；数理科学 2008 年 2 月号；日本物理学会誌 2007 年 9 月号．

6) 夏梅誠，別冊数理科学（近刊）．

7) A.M. Polyakov, *Phys. Lett. B* **103** (1981) 207.

8) スティーヴン・ワインバーグ，『宇宙創成はじめの三分間』（ダイヤモンド社，1977 年）．

（なつうめ・まこと，高エネルギー加速器研究機構）

宇宙検閲官仮説とブラックホール

中尾　憲一

1. はじめに

アインシュタインによって提案された一般相対論は，重力を時空の幾何学によって説明する理論です．地球近傍の重力が関係する物理現象に関しては，ニュートンの万有引力の法則に比べてその精度は約10桁も高いことが観測実験で確認されています．その一般相対論が予言する時空の幾何学的構造に**ブラックホール**と**時空特異点**があります．ここでは，時空特異点とその性質に関する**宇宙検閲官仮説**，そして，宇宙検閲官仮説とブラックホールの関係を解説します．ペンローズによって宇宙検閲官仮説が提案されてから40年ほど経ちましたが，現代的な意味を再考したいと思います．

2. 重力崩壊による時空特異点の形成

太陽より数十倍大きな質量を持つ星は，その進化の最終段階において，自らの生み出す重力が圧力を凌駕し収縮し続けます．この過程を**重力崩壊**と呼びます．

球対称の星の重力崩壊は，これまでに行われた詳しい理論的解析のおかげでかなり良く判っており．図1は，それを抽象的に描いたものです．横軸は星の表面の半径（表面の面積を 4π で割り，その平方根をとったものです）で，矢印の付いた縦の直線は時間軸ですが，この図では，時間一定の線が水平な直線ではなく曲線です．やや太めの曲線が星の表面の世界線[*1]で，星の半径が時間とともに小さくなり，最終的にゼロになることを表しています．

星の半径がゼロになると，星の内部では，物質や放射のエネルギー密度や圧力，そして時空の曲がり具合を表す曲率が無限大になります．時空の曲率は，物理的には潮汐力として観測されます．この物理量，幾何学量が発散するところは時空特異点と呼ばれています．図1では，時間軸が途中で時空特異点（太い点線）に変わっています．時空特異点は時空に含まれません．なぜなら，時空とは，それがどれだけ曲がっていようとも．局所的にはミンコフスキー時空と区別がつかないというのが，前提にあるからです．そして，一般相対論で

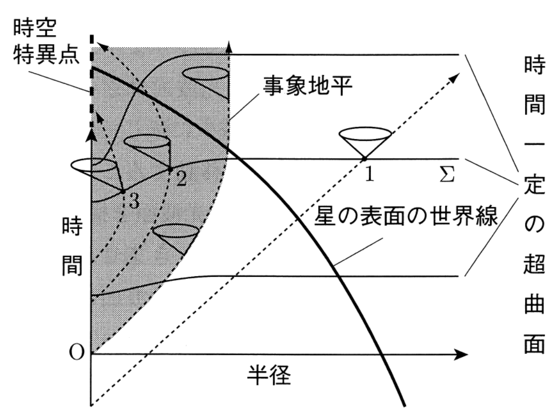


図1　球対称な星の重力崩壊．影をつけた領域がブラックホール．

*1)　図1中の曲線は本当はそれが線でなくても，すべて世界線と呼ぶことにします．

は，ミンコフスキー時空で定式化されている既知の物理法則が局所的にはそのままの形で成り立っていると考えます．しかし，時空特異点は局所的にミンコフスキー時空ではありませんから，既知の物理法則は適用できません．もちろん，幾何学の破綻している‘場所’ですから，一般相対論も予言能力を失います*2)．

それでは，時空特異点は物理学が適用できない場所かというと，そういうわけではありません．一般相対論では重力崩壊の最終段階を記述できないだけだと物理学者は考えています．そのような物理現象を記述する理論は，重力の量子論的な効果を記述することが必要だと考えられており，それゆえ，量子重力理論と名付けられています．量子重力理論の候補は幾つかありますが，十分な予言能力を持つまでには，もう少し時間が必要です．

■ 3. ブラックホールの形成 ■

図 1 には，中心から等方的に放射された 4 つの光の波面の世界線が点線で描かれています．一般に星は光に対して不透明ですから，ここで考える光は，星の中でも吸収や散乱されずに伝播する仮想的なものと考えてください．重力崩壊の初期に放射された光波面の半径は時間が経つにつれて大きくなるのですが，ある程度重力崩壊が進んだ段階で放射された光波面は，星の生み出す重力によって，途中から面積が変化しなくなります．さらにその後に中心から放射された光波面は途中でその面積が極大に達し，その後，減少に転じて最終的にゼロになります．光より速く移動することは不可能ですから，外向きに伝播する光波面を横切って，その内側から外側へ出ることはできません．このことに注意すると，面積が一定の光波面は，その内側から外側に脱出することのできない有限な大きさの静的な球形領域の出現を意味します．この仮想的な光波面に囲まれた領域がブラックホールであり，この仮想光波面は**事象地平**と呼ばれます．

*2) 実は，曲率の発散の仕方が弱い場合は，既知の物理理論で時空特異点を取り扱うことができることもあります．

球対称な空間的超曲面（3 次元空間）と光波面の交わりは球面です．図 1 に時間一定の超曲面 Σ 上の球面（図中では点として表現されます）に光円錐を描きました（1 から 3）．球面 1 から外向きに放射された光波面の面積は増加し，内向きに放射された光波面の面積は減少します．球面 2 から外向きに放射された光波面の面積は，微小な時間が経過しても変化しませんが，内側へ放射された光波面の面積は減少します．最後に一番内側の球面 3 ですが，そこから外向き放射された光波面も内向きに放射された光波面も，その面積が減少します．球面 3 は**閉じた捕獲面**と呼ばれており，球面 2 は**閉じた限界捕獲面**と呼ばれています．球面 1 は，普通の面ですから，名前は特についていません．

面積が一定になったときの，事象地平は限界捕獲面と一致しています．しかし，面積が一定になる前の事象地平は捕獲面でも限界捕獲面でもない普通の球面です．

■ 4. 宇宙検閲官仮説 ■

前述の球対称重力崩壊では，事象地平→閉じた捕獲面→時空特異点の順に形成されていきます．また，時空特異点は事象地平に囲まれるので，その外にいる我々のような観測者は，時空特異点を観測できませんし，その影響を受けることもありません．それでは，この時空特異点が我々に影響を及ぼさないという性質は，一般的なのでしょうか．

ペンローズは 1969 年の論文に，「特異点を事象地平で覆い隠し，裸の特異点の出現を禁止する宇宙検閲官はいるのだろうか？」という問題提起をしました[1]．ここで，裸の特異点とは事象地平に隠されず，我々のような観測者が原理的に観測可能な時空特異点のことです．既に述べたことですが，時空特異点は一般相対論を含む既知の物理理論が適用できない場所なので，それが物理的影響を及ぼすことのできる領域で何が起きるのかは，これらの理論では予言不可能です．そして，この解説記事のテーマである宇宙検閲官仮説とは「宇宙検

閲官はいる」という仮説です．もちろん，宇宙検閲官という役職に就いている人がいると言っているわけではなく，我々の宇宙に裸の特異点は存在しないという主張です．ただし，宇宙の始まりに対応するビッグバン特異点は除きます．これだけは，事象地平に隠しようがありませんから．

その後，宇宙検閲官仮説はより数学的に厳密な形に定式化されました．現在は，**弱い検閲官仮説**と**強い検閲官仮説**と呼ばれる 2 つのバージョンが存在しますが，この解説記事で宇宙検閲官仮説という場合，弱い検閲官仮説のことです．強い検閲官仮説については参考文献 2) をご覧ください．

■ 5. 漸近平坦性 ■

ブラックホールは，孤立系でのみ明確に定義できる概念です．一般相対論における孤立系というのは，十分遠方は重力が弱い，すなわちミンコフスキー時空で良く近似できる系であり，それゆえ，**漸近平坦**な時空と呼ばれます．無限遠がミンコフスキーと似ている時空を定義するために，ミンコフスキー時空の無限遠の構造を調べてみましょう．

ミンコフスキー時空の無限小世界間隔は，3 次元空間に極座標を用いると，

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{1}$$

と表されます．無限遠というのは，もちろん極限 $r \to \infty$ で定義されるのですが，空間的曲線に沿っての極限なのか，光的曲線に沿っての極限なのか，あるいは時間的曲線に沿っての極限なのかという任意性があります．空間的曲線に沿っての極限は，**空間的無限遠**（i^0 と書きます）と呼ばれます．光的曲線に沿っての極限は，**光的無限遠**（未来向きの曲線の場合 $\mathcal{I}^+$，過去向きの曲線の場合は $\mathcal{I}^-$ と書きます)，時間的曲線に沿っての極限は，**時間的無限遠**（未来向きの曲線の場合 i^+，過去向きの曲線の場合は i^- と書きます）と呼びます．

しかし，ここで注意しなければならないのは，無限遠は時空に含まれないということです．「漸近平坦な時空とは，ミンコフスキー時空に含まれない無限遠という‘場所’が，ミンコフスキー時空と同じ時空である」という一見すると禅問答のような話なので，漸近平坦という概念を明確に定義するためには一工夫が必要です．以下では，ペンローズが導入した**等角完成**（conformal completion）という手続きを紹介します．

まず，光的座標 $u := t - r$ と $v := t + r$ を導入しましょう．$u =$ 一定は，r の増加する方向に光速で移動する粒子の世界線であり，$v =$ 一定は r が減少する方向に光速で移動する粒子の世界線です．そうすると，$\mathcal{I}^+$ は $v = +\infty$ であり，$\mathcal{I}^-$ は $u = -\infty$ です．我々は無限遠の構造を知りたいので，新しい光的座標 (U, V) を以下のように導入します．

$$u = \tan\frac{U}{2}, \quad v = \tan\frac{V}{2}. \tag{2}$$

さらに，新しい時間座標と動径座標を以下のように導入しましょう．

$$T = \frac{V + U}{2}, \quad R = \frac{V - U}{2}. \tag{3}$$

この座標を用いると無限小世界線素は

$$d\tilde{s}^2 = -dT^2 + dR^2 + \sin^2 R d\Omega^2, \tag{4}$$

$$\omega = 2\cos\left(\frac{T - R}{2}\right)\cos\left(\frac{T + R}{2}\right) \tag{5}$$

として

$$ds^2 = \omega^{-2} d\tilde{s}^2 \tag{6}$$

となります．ω は等角因子と呼ばれます．$d\tilde{s}^2$ はアインシュタインの静的宇宙として知られる時空の無限小世界線素で，$0 \le R \le \pi$, $-\infty < T < \infty$ です．

注意深く極限をとると，$(T, R) = (\pm\pi, 0)$ は $i_\pm$ に，$(T, R) = (0, \pi)$ が i^0 に，また，$R = 0$ は $r = 0$ に対応します．そして，$U = -\pi$ が $\mathcal{I}^-$，$V = \pi$ が $\mathcal{I}^+$ に対応します．それゆえ，(T, R) 座標では，ミンコフスキー時空が，アインシュタインの静的宇宙の領域に含まれる有限区間 $0 \le R < \pi$, $-\pi < U < \pi$, $-\pi < V < \pi$ に埋め込まれていると見なすことができます（図 2：ペンローズ図，

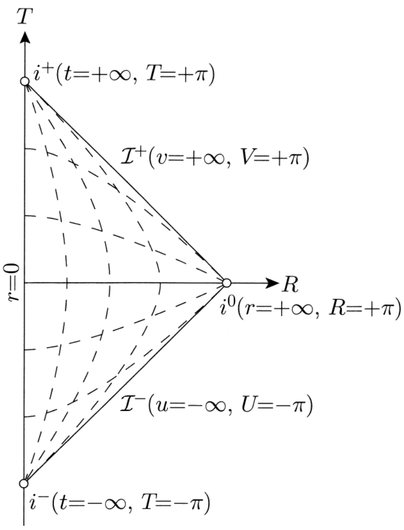


図 2　ミンコフスキー時空のペンローズ図．接線の傾きの絶対値が 1 より大きな点線は $r=$ 一定の曲線，1 より小さな点線は $t=$ 一定の曲線．

あるいは等角図と呼ばれます）．ミンコフスキー時空がアインシュタインの静的宇宙の有限区間に対応しているという情報は ω に含まれています．$U=\pm\pi, V=\pm\pi$ で $\omega=0$ になるので，ds^2 が発散してしまいますから，そこがミンコフスキー時空の縁（へり）だということが判ります．

このように，ds^2 で記述される時空全体を有限区間で表すことのできる光的座標 (U, V) を導入することによって，$d\tilde{s}^2$ で記述される別の時空に埋め込む手続きを等角完成と呼びます．そして，この $d\tilde{s}^2$ で記述される時空は**非物理的時空**と呼ばれています．

等角完成することにより，ミンコフスキー時空が埋め込まれたアインシュタインの静的宇宙は，ミンコフスキー時空と同じ因果構造（任意に選んだ 2 点が，時間的曲線あるいは光的曲線で結べるかどうか）を持ちます．さらに，注意していただきたいのは，アインシュタインの静的宇宙には，ミンコフスキー時空には含まれないミンコフスキー時空の無限遠 $\mathcal{I}^\pm$ と i^0 が含まれているという事実です．非物理的時空では，無限遠を実際に有るものとして議論することができるのです．

一般の時空では，等角完成によって導入される非物理的時空が，アインシュタインの静的宇宙に一致するとは限りませんが，元の時空と同じ因果構造を持ち，等角因子 ω がゼロになるところが時空の縁に対応するという事情は変わりません．この時空の縁は，時空には含まれませんが，非物理的時空は含まれます．ただし，一般の時空では，この縁が時空特異点の場合もあるので，注意が必要です．そして，漸近平坦な時空とは．等角完成をして非物理的時空を導入したときに，ミンコフスキー時空と同様の無限遠 $\mathcal{I}^\pm$ と i^0 を持つ時空と定義されます．どのように‘同様’なのか，その詳細を知りたい読者は，参考文献 2) を参照してください．

また以下で見るように，ブラックホールの数学的な定義や定理の証明には，$\mathcal{I}^+$ や i^0 を利用しますので，非物理的時空を導入して論理を展開します．

■　6. ブラックホールの定義　■

球対称重力崩壊の例を使って，ブラックホールについての直感的な説明をしましたが，ブラックホールを数理科学の研究対象とするためには，厳密な定義が必要です．

ブラックホールというのは，その内側から外側に物理的影響を及ぼすことのできない領域です．ですから，もちろん未来の光的無限遠には影響を及ぼすことはできません．未来の光的無限遠 $\mathcal{I}^+$ に影響を与え得る領域を $J^-(\mathcal{I}^+)$ と書きましょう．そうすると，漸近平坦な時空 M におけるブラックホール B は以下のように定義すればよいことが分かります．

$$B = M - J^-(\mathcal{I}^+). \tag{7}$$

すなわち，B は M における $J^-(\mathcal{I}^+)$ の補集合です．これ以上に適切なブラックホールの定義はなさそうに思われますが，今この瞬間のブラックホールの状態が，未来のありようで決まるわけですから，物理の常識からかけ離れた，かなり不可

思議な定義です．無限の未来が分からなければ，今この瞬間にどこからどこまでがブラックホールなのかが分からないのですから．しかし，この奇妙ではあるけれど，ブラックホールの本質を適切にとらえた定義のおかげで，ブラックホールの性質に関する様々な定理が数学的に証明されました．ここでは，後のブラックホール物理学の進展に極めて重要な貢献をした以下の2つの定理に注目しましょう．

1. 閉じた捕獲面および閉じた限界捕獲面はブラックホールの中に存在する．
2. 事象地平の面積は減少しない．

以後，この2つの定理をブラックホールの定理1および2と呼ぶことにします．定理1および2は特異点形成に関しては何も言及していませんが，1965年にペンローズが発表した特異点定理によって，閉じた捕獲面の形成に続く時空特異点の形成が極めて一般的であることが明らかにされています．

この特異点定理と定理1および2は，前述の球対称重力崩壊によるブラックホールおよび時空特異点の形成シナリオが一般的であることを示唆しているように思われます．しかし，上記の2つの定理の証明には，宇宙検閲官仮説が仮定されているので，この仮定を外した場合でもそのシナリオが一般的なのかどうかは，実は全く自明ではありません*3)．一般相対論におけるブラックホールの定義には，(7)式だけでなく，宇宙検閲官仮説も含まれていると考えるべきでしょう．

■ 7．証明の概略 ■

定理1と2の証明において仮定されているのは，以下の2つの条件です．

1. リッチ集光条件．
2. 強い漸近的予言可能性．

条件1のリッチ集光条件とは，任意の光的ベクトル k^a に対して $R_{ab}k^ak^b \geq 0$ が成立することです．ここで，R_{ab} はリッチの曲率テンソルで，アインシュタイン方程式が成り立っている場合は，この条件を物質・放射のエネルギーの非負性と読み替えることができます．条件2の強い漸近的予言可能性とは，$\overline{M \cap J^-(\mathcal{I}^+)} \subset \tilde{V}$ となる，コーシー面を持つ開集合 $\tilde{V}$ が存在するということです*4)．ここで，コーシー面とは，その幾何学的情報と，その上に用意した物質・放射の初期条件だけで決定される領域が $\tilde{V}$ と一致する非時間的集合*5)のことです．ややこしい定義ですが，要するに裸の特異点がないということですので，弱い宇宙検閲官仮説を仮定していることと等価です．

紙面が限られている都合上，定理1の閉じた捕獲面に関する部分だけに注目し，その証明の概略を紹介しましょう．コーシー面を持つ領域では，コンパクトな集合（有界な閉集合）が物理的に影響を与え得る領域が閉集合であることを示すことができます*6)．閉じた捕獲面 T はコンパクトな集合ですから，もしそれが $\tilde{V}$ の中にあれば，それが物理的に影響を与え得る領域（$J^+(T)$ と書きます）は閉集合です．我々は $\tilde{V}$ の外にある T には興味はありませんから，$J^+(T)$ は閉集合と考えても全く問題はありません．そうすると，もし $T \cap J^+(\mathcal{I}) \neq \emptyset$ ならば，図3のように $J^+(T)$ の境界（図3中の点線）と $\mathcal{I}^+$ の交点 q が存在することを示すことができます（これは，$J^+(T)$ が閉集合でなければ示すことができません）．一方，条件1と捕獲面の定義から，$J^+(T)$ の境界は有限の長さを持つことを示すことができます．これは，図3と矛盾する結論です．それゆえ，$T \cap J^-(\mathcal{I}^+) = \emptyset$，すなわち，捕獲面はブラックホールの中にしか存在できないという結論に至ります．

定理1の閉じた限界捕獲面に関する部分と定理2も基本的に，同じ手法で証明されるので，強い漸近予言可能性が重要な役割を演じていることが

*3) 実は，ペンローズの特異点定理も，検閲官仮説が仮定されています．

*4) 開集合というのは有限個の開区間（境界を含まない4次元の球）の和集合で表される領域です．

*5) どの2点を選んでも，それらを時間的曲線で結ぶことにできない集合．

*6) 閉集合とは開集合の補集合です．

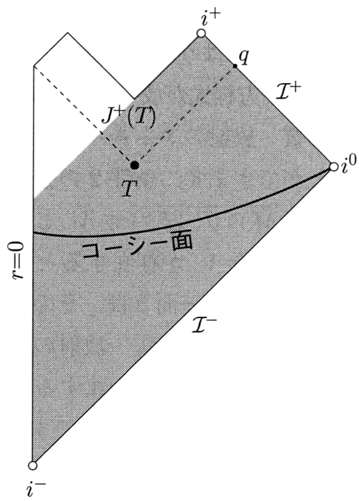


図 3　領域 $\tilde{V}$ のペンローズ図．閉じた捕獲面 T が $J^-(\mathcal{I}^+)$ に存在すると仮定．T を始点とする傾きが ± 1 の 2 本の点線より上が $J^+(T)$．

わかると思います．

8．検閲官仮説の現代的な意味

ブラックホールの定理 1 は，これがなければ数値シミュレーションによるブラックホールの研究は不可能と言っても過言ではありません．また，ブラックホールの定理 2 は，おそらくブラックホールに関する最も有名な定理ではないでしょうか．この定理 2 に触発され，ベッケンシュタインは事象地平の面積がブラックホールの持つエントロピーに比例していると主張しました．当初は誰も信じなかったようですが，その後，ホーキングによって，ブラックホールが熱放射と同じスペクトルの放射をすることが示され，ベッケンシュタインの主張に対する理論的裏付けが得られたのです．

ホーキングが示した結果は，ブラックホール時空において物質・放射の量子論的解析を行うことによって得られたもので，重力に関する量子論的な性質は一切考慮されていません．しかし，巨視的なブラックホールに対する重力の量子論的効果は小さいと思われるので，ブラックホール時空自身は古典的に取り扱っても良いでしょう．また，量子重力理論の知識がなくとも，エネルギーは保存すると考えて間違いはないでしょうから，ブラックホールが放射をするということは，ブラックホールはその質量を減少させるはずです．ここでは簡単のために帯電していない球対称ブラックホールを考えましょう．帯電していない球対称ブラックホールの事象地平の面積は質量の 2 乗に比例しますから，質量の減少は事象地平の面積の減少を意味し，定理 2 が成り立っていないことになります．これは，量子論的にはエネルギー条件が破れているからだと考えることができます（条件 1 が成り立っていないことに対応します）．事象地平の面積が減るということはブラックホールのエントロピーは減少することを意味しますが，これは必ずしも熱力学第 2 法則の破綻を意味しないことに注意してください．ブラックホールの外側に存在するエントロピーを合わせた全エントロピーが増加すれば問題はありません．

ところで，ブラックホールは，その質量がプランク質量 $\sqrt{\hbar c/G} \simeq 2.2 \times 10^{-5}\mathrm{g}$ と同程度になると，その大きさと位置の不確定性が同程度になると予想され，量子重力の効果が非常に重要になると考えられています[*7]．従って，ブラックホールは量子論的な放射によって，最終的に一般相対論で記述不可能な状態（領域）になることが予想されます．一般相対論で記述不可能な領域は，時空特異点と等価ですから，ブラックホールの最後は‘時空特異点’ということになります．もちろん，それは事象地平に囲まれませんので，裸の特異点です．ブラックホールと思われていた‘もの’がその進化の最終段階で宇宙検閲官仮説を破る可能性があるのです．現在の量子重力理論の研究は，このブラックホールの量子論的性質をメインテーマの一つとして進められていると言っても過言ではないと思います．

しかしながら，重力の量子論的な考察をせず，古典理論である一般相対論の枠組みで宇宙検閲官仮

*7）　そこまで小さくならなくても量子重力の効果が重要になるという説もあります．

説（弱い仮説）を考えた場合，私見ですが，それに対する深刻な反例はまだ見つかっていません．ただし，まだそれが真であることが証明されたわけでもありません．この仮説の正否は，一般相対論の問題として，現在も多くの重力の研究者が取り組んでいる未解決問題の１つです．もし，この仮説に対する深刻な反例が見つかれば，ブラックホールという状態を経由せずに重力の量子論的な性質が顕著になる物理過程の存在を強く示唆しますから，量子重力理論に関する今後の研究の方向性にも影響を与える可能性があります．

参考文献

1) R. Penrose, *Riv. Nuovo Cimento* **1**, p.252 (1969 年).
2) R.M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press (1984 年).

（なかお・けんいち，大阪市立大学大学院理学研究科）

ニュートンは「われ，仮説を作らず」と言ったが

荒船 次郎

ニュートンの「**われ，仮説を作らず**」という言葉はとても有名です．ニュートンの名著『プリンキピア』の巻末に書かれたもので，哲学（科学）の**主張**（**命題**）は，**現象**の観察から導き出され，後に，それを**帰納的**に一般化すべきもので，**仮説**をねつ造して現象を説明するのは実験哲学ではない，というものです．

現象の観察や実験こそが大事だ，ということには大いに共鳴しても，このあまりにも強い否定の言葉の解釈には多くの人が悩みました．なぜなら，現象を説明できる仮説を立て，その仮説の色々な帰結を実験で検証することで科学が進歩した例は多いし，第一，ニュートン自身がそれ以前の自著に，「仮説」という言葉を使って考察をし，また，その用法も時間的に変っているからです．

そこで，この言葉の解釈をめぐっては，湯川秀樹先生も，『プリンキピア』の訳書（河辺六男訳，中央公論社）の付録座談会で「この言葉（われ，仮説を作らず）が私は前々から気になっているんですけれども，彼はどういう文脈で仮説を作らずといったんですか」と訳者に尋ねています．また，読みやすい伝記『ニュートン』（E.N.da C. Andrade著，久保亮五，久保千鶴子訳，河出書房）の副題が「私は仮説を作らない」であることは，著者がこの言葉をとても重視している現れです．科学者マッハのように，この言葉を実証主義として称賛する人もいれば，科学史家 I.B. Cohen のように，ニュートンは「仮説」を時と文脈により異なる意味に使い，著作や手紙や版の相違により，「仮説」を「規則」や「公理」に変えたり，逆に「公理」を「仮説」に変える例もあって，仮説の用法は全部で 9 種類に分類できると分析する人や，N.R. Hadson のように 5 種類に分類する人もいます．

ニュートンの「仮説」の解釈は，首尾一貫した同じ意味で用いたのではなく，ニュートンの人間性も考慮し，時間変化も認めて，文脈により解釈されるべきなのでしょう．例えば，力学の歴史を論じた中で山本義隆さんは「われ，仮説を作らず」の「仮説」は一般的仮説ではなく，「仮構」（あるいは「憶測的仮説」）という狭い意味の仮説であるとしています．1936 年にニュートンの大量の手稿が親族の子孫から競売に出され，経済学者ケインズは多くを買い集めた資料に基づいて，ニュートンの私的で人間的な面を紹介しました．ニュートンは一生を独身で過ごし，冷徹な科学者と見える反面，魔術師のように謎を追求し，錬金術や秘かに異端のキリスト教学に打ち込み，自然科学や数学の研究に劣らぬ膨大なエネルギーを費やし，内向的で強い猜疑心や恐怖心を持ち，重力や微積分の発見の優先権を過激に争い，それでいて，研究に驚異的な集中力を持続した，複雑な人間像が浮かびます（しかし，その変人振りはニュートンの偉

大さを少しも損なわないともケインズは言っています）．私は科学史が専門ではありませんから詳しくは知りませんが，ニュートンも人間だった，という紹介には興味と安心を覚えます．

『プリンキピア』では，天体の運動から，海の潮汐の運動まで，様々な現象がニュートンの力学と重力の法則によって定量的に議論されました．しかし，力が離れた物体に瞬時に伝わり，強さは距離の二乗に反比例するという重力の起源は，説明しませんでした（当時，惑星の公転運動は太陽の周囲に渦巻く未知の物質の渦動に惑星が運ばれて起こる，というデカルトの説明にも影響された大陸の人々は，離れた物体に瞬時に力を及ぼすという重力は受け入れ難かったようです．重力の起源が未完成にせよ場の量子論や弦理論で論じられるには20世紀まで待つ必要があったのですが）．ニュートンは，自分は重力の起源は説明できないが，重力が存在し，重力が天体から海までの諸現象を導くなら，今はそれで十分で，仮説は作らない，と宣言しました．ホイヘンス（オランダ）やライプニッツ（ドイツ）は，重力による説明を認めず，ニュートンを強く批判したようです．ニュートンのこの強い言葉は，その批判を意識して，自分の理論はエーテルの渦動などの勝手な「仮説」を使わない，ということを強調した文脈で述べられています（「われ，仮説を作らず」のラテン語原文は“Hypotheses non fingo”，英訳は“I feign no hypotheses.”）．

そのようなわけで，ニュートンの「われ，仮説を作らず」は，勝手な仮説はねつ造しない，という文脈で書かれても，観測に基づく作業仮説まで否定するようなものとは考えられません．

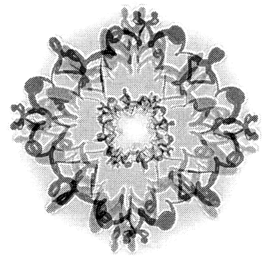
ただ，もし今，「仮説」をニュートンが否定した勝手な仮説よりは積極的だが，まだ証明が不十分な規則の意味にとるとき，「仮説」と「現象」との関係に割り切れないものを感じるときがあります．とくに，私は現代物理学を説明する**模型**についてそれを思います．古典物理学では，**観測できる量**だけで理論を作ることができたのですが，現代物理学では，量子力学の導入以来，物理量として観測できる量だけを使った計算はできず，原理的に観測できない**計算途中だけに現れる量**を導入します．

例えば，量子力学には，状態の**位相**という概念があり，素粒子の標準模型理論には位相を拡張した**ゲージ**という概念があり，ときには，**負の確率**が現れます．これらはそのままでは観測できない量です．また，観測ではあり得ない**「負のエネルギー」**の電子が充満した真空も想定します．しかし，理論の対称性のため，この負のエネルギーの負電荷の「電子」が充満した真空を考える模型と，負のエネルギーの正電荷の「陽電子」が充満した模型は，同じ観測値を与えます．そのため，**実際の真空には，正負のどちらが詰まっているのか**，という問いに答えることは原理的にできません．どちらかが詰まっているのに，「本当はどちらが詰まっているのでしょう」，という問いが意味をなさないのです（位相の絶対値やゲージについても同様な問題があります）．

現代物理学の理論はすべて模型に基づいていますが，「計算途中だけに現れる概念や量」の使用が避けられない以上は，どこまで実験的検証をしても，「模型」はいつまでも仮説であり続けるのだろうか，あるいは「本当は」とか「実在は」などと考える意味はなく，計算し予言できる「道具」があれば，それがすべてなのだろうか，どこかニュートン時代と似たような疑問が湧いてきて割り切れないと思うときがあります．

（あらふね・じろう，東京大学名誉教授）

エルゴード仮説



北原 和夫

1. エルゴード仮説とは

多数の分子からなる物質（これを「**巨視的物質**」と呼ぶことにする）の状態を温度，圧力といった物理量で表す場合に，いったいそのような物理量は分子のどのような性質を反映しているのか，ということになる．例えば，通常の気体でおおよそ成り立つ理想気体の**状態方程式**が知られている．すなわち，気体の温度 T (K)，圧力 P (Pascal)，体積 V (m^3)，モル数 n (mol) に対して $PV=nRT$ が成り立つ．圧力は力を面積で割った量であり力学的に定義できるが，この圧力は個々の分子が壁に及ぼす力積ではなく，アボガドロ数程度の多数の分子が壁に及ぼす力積の平均的なものである．なぜなら，壁は分子に比べて十分に重くそれに接続している圧力の測定装置には平均的な力積しか伝わらないからであり，またそれで我々にとって十分だからである．温度は個々の分子の運動エネルギーの平均値に相当する．このことは，「気体分子運動論」によって説明することができる．もう少し限定的に言えば，状態方程式のように少数の物理量で状態を表せる場合というのは，巨視的物質が熱平衡状態にあるときの話である．つまり，巨視的物質を放っておくとしばらくして時間変化をしない状態に落ちつく．これを熱平衡状態と呼ぶ．

状態方程式に現れている巨視的物質の状態を表す物理量は，測定に特徴的な時間における平均値によって与えられる．個々の分子衝突は時には重なって大きくなったりして揺らいでいる．このように変動する物理量を時刻 t の関数として $A(t)$ と表すとその**時間平均**は

$$\overline{A(t)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T dtA(t)$$

で与えられる．

いま，N 個の分子からなる系を考え，i 番目の分子の位置を q_i，運動量を p_i とする．そして，N 個の分子の位置と運動量の全体を $\Gamma\equiv(q_1,p_1;q_2,p_2;\cdots,q_N,p_N)$ と表すことにしよう．物理量 A は基本的にはこれらの変数の関数として与えられるものであるからこれを $A(\Gamma)$ と表す．よって，変数 A の時間変化とは，分子の状態が時々刻々変化することによって起こるのである．分子の状態とは，分子の位置と運動量ということであり，Γ すなわち，$(q_1,p_1;q_2,p_2;\cdots,q_N,p_N)$ が時間の関数として変化する，ということである．

エルゴード仮説というのは，上で述べた時間平均がある確率分布による平均値

$$\langle A\rangle=\int d\Gamma A(\Gamma)f(\Gamma)$$

で置き換えられるということである．ここで，$f(\Gamma)$ は分布関数である．

2. 分子力学系の記述

いま，孤立した分子系を考えることにする．孤

立した系ということは，分子の位置と運動量の変化に対する運動方程式は，分子の位置と運動量によって表される，ということで，外部の影響を表す変数は存在しない，ということである．実際には，系全体のエネルギーに相当するハミルトニアン $\mathcal{H}(\Gamma)$ が存在して，**運動方程式**は

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad i = 1, \cdots, N$$

で与えられるものである．この運動方程式の形から直ちに言えることは2つある．一つは，運動の軌道に沿ってハミルトニアンは一定であるということである．これは $\mathcal{H}$ の時間変化

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} \right)$$

に運動方程式を代入すれば明らかである．もう一つの性質は Γ という変数の空間（**相空間**と呼ぶ）において，初期条件の集団の体積は，この運動方程式に沿って変わらないということである．いま初期条件の集団を集合 A で表し，その体積を測度 $\mu(A)$ で表す．A の各点から出発して時刻 t に到達する点の集合を A_t と表すと，$\mu(A) = \mu(A_t)$ となる．よって，μ は**不変測度**（invariant measure）と呼ばれる．また，運動方程式によって $A = A_t$ であるとき，すなわち，集合自体が変化しない場合，A を**不変集合**（invariant set）と呼ぶ．

そこで，もし，軌道がエネルギー一定，すなわち，$\mathcal{H}(\Gamma) = E$ を満たす領域をくまなく経巡るということがあれば，その領域に適当な分布を与えて物理量の平均値を求めて，時間平均と同一視することができる，ということになる．

そのように「くまなく経巡る」ということは，**metrically indecomposability**（**測度的不可分割性**）という概念で表される．その反対概念である測度的可分割性とは，エネルギー一定，すなわち $\mathcal{H}(\Gamma) = E$ を満たす面上で，いくつかの複数領域が存在して，それぞれの領域において，その中のすべての点から出発する運動は，その領域の中に含まれる場合である．別の言い方をすると，運動が可能な領域がいくつかの不変集合に分割されて，それらの間に行き来がない，ということである．

逆に，測度ゼロ（すなわち体積ゼロ）の領域を除いて，すべての領域が運動方程式によってつながっていることを，測度的不可分割性である，という．数学的には，測度的不可分割性をもつとき，系はエルゴード性をもつ，ということが証明されるのである．

3. 混合性

ところで，エルゴード性よりもさらに強い概念がある．これを**混合性**という．集合 A の各点から出発して時刻 t に到達した点の集合を A_t とする．さらにある集合 B と集合 A_t の共通部分 $B \cap A_t$ が B の中のどれほどを占めているかを表す量として，それぞれの体積 $\mu(B \cap A_t)$ と $\mu(B)$ の比 $\dfrac{\mu(B \cap A_t)}{\mu(B)}$ を考える．もし，集合 A_t が，どんどん拡散して，一様な分布になってしまうと，この比は，集合 A の体積と $\mathcal{H} = E$ のエネルギー面 S の体積との比と同じになることが期待される．よって「混合性」を

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\mu(B \cap A_t)}{\mu(B)} = \frac{\mu(A)}{\mu(S)}$$

によって定義する．

これを次のように書くこともできる．

$$\lim_{t \to \infty} \mu(B \cap A_t) = \frac{\mu(A)\mu(B)}{\mu(S)}.$$

A として，不変集合をとってみる．つまり，すべての軌道がその集合内に収まるとする．そうすると，$A_t = A$ である．さらに，B としてこの不変集合をとり，$B = A = A_t$ とすると，$B \cap A_t = A$ であるから

$$\mu(A) = \frac{\mu(A)\mu(A)}{\mu(S)}$$

が得られる．よって，不変集合 A について $\mu(A) = 0$ か $\mu(A) = \mu(S)$ のいずれかとなる．よって混合性をもつ系の場合には，測度がゼロでない不変集合については，$\mu(A) = \mu(S)$ ということになる．つまり，運動で到達する領域の体積は，エネル

ギー一定の面上の体積と同じであるから，エネルギー一定の面上で平均値をとることによって，時間平均をとることが可能となる．

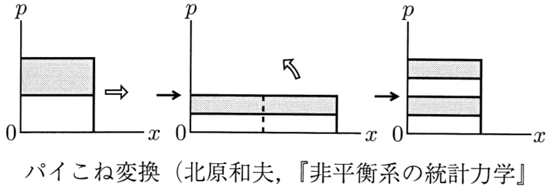
混合系の例としてのローレンツ模型

混合性が起こるためには，軌道の集団が相空間に拡散していくことが必要である．そのためには，近接する初期条件から出発した2つの軌道の相違が時間とともに増大していくことが必要となる．このように僅かな初期条件の相違が拡大されることを「**軌道不安定性**」と呼んだり，「初期条件に対する敏感な依存性」と呼んだり，「**カオス**」と呼んだりする．簡単な例としては，ランダムに配置された剛体球に小球が衝突する場合で，「**ローレンツ気体**」と呼ばれる模型である．小球が剛体球に衝突するとき，僅かな衝突角の相違が衝突後には2倍に拡大される．さらに拡大されると，衝突する相手の剛体球が別のものになる場合もある．パチンコは釘に対して球が衝突するもので，さらに重力も働き，複雑な運動となるが，僅かな初期条件の相違がその後の運動を大きく変えるので，なかなか続けてよい結果が出せない，ということになる．

パイこね変換

力学から導かれる模型ではないが，相空間の体積を不変に保ったまま軌道の集団が拡散することを示す模型として「**パイこね変換**」がある．図のように横軸に変数 x，縦軸に変数 p を面積1の正方形があり，ある時刻 n において (x_n, p_n) の位置にある点が次の時刻 $n+1$ において点 (x_{n+1}, p_{n+1}) に移る．そのときの規則として

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n \\ p_{n+1} = \dfrac{p_n}{2} \end{cases} \quad \left(0 \le x_n < \frac{1}{2}\right),$$



パイこね変換（北原和夫，『非平衡系の統計力学』（岩波書店）より）．

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ p_{n+1} = \dfrac{p_n + 1}{2} \end{cases} \quad \left(\frac{1}{2} < x_n \le 1\right).$$

これは，各段階で点の集団を x 方向に伸ばすと同時に p 方向には縮めることによって，点の集団の面積は保存させる．x 方向に伸びたうちの右の半分を切って左の半分の上に載せることによって全体として正方形の形にする．なぜパイこね変換と呼ぶかというと，例えば最初の段階で下半分を小麦粉，上半分をバターとする．そうすると，1回の変換で，粉，バター，粉，バターの四層になる．これを繰り返すと，「粉，バター，粉，バター，…」の多数の層ができ，これを焼けば「パイ」ができる，ということである．名称はともかく，これより近接する2点間の距離が，1回の変換で2倍になる．

次に，このような変換で分布関数がどのように変化するかを見てみよう．上の変換を次のように書く．

$$\begin{cases} x_{n+1} = X(x_n, p_n), \\ p_{n+1} = P(x_n, p_n). \end{cases}$$

n 回目のときに x_n の値が x と $x + dx$ の間，p_n の値が p と $p + dp$ の間に存在する確率を $f_n(x,p)dxdp$ などとすると，軌道の一様性から $f_{n+1}(x_{n+1}, p_{n+1})dx_{n+1}dp_{n+1} = f_n(x_n, p_n) dx_n dp_n$ であり，体積保存則から $dx_{n+1}dp_{n+1} = dx_n dp_n$ であるから，$f_{n+1}(X(x,p), P(x,p)) = f_n(x,p)$ が導かれる．あるいは

$$f_{n+1}(x,p) = f_n(X^{-1}(x,p), P^{-1}(x,p))$$
$$= \begin{cases} f_n\left(\dfrac{x}{2}, 2p\right), & \left(0 \le p < \dfrac{1}{2}\right), \\ f_n\left(\dfrac{x+1}{2}, 2p-1\right), & \left(\dfrac{1}{2} \le p \le 1\right). \end{cases}$$

x 座標の分布を見るには

$$g_n(x) \equiv \int_0^1 dp f_n(x,p)$$

を定義すると，上記の性質から，

$$g_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left[g_n\left(\frac{x}{2}\right) + g_2\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]$$

が導かれ，

$$g_{n+k}(x)=\frac{1}{2^k}\sum_{l=0}^{2^k-1}g_n\left(\frac{x+l}{2^k}\right),$$

すなわち，$k\to\infty$ で

$$g_\infty(x)=\int_0^1 dx' g_n(x')=\text{const.}$$

で x に依存しなくなる．つまり，x 方向には一様な分布となる．こうして，混合性を示す系は，エルゴード的であることが分かる．もしそうなら，エネルギー $\mathcal{H}$ 一定の面上を「くまなく」経巡ることとなる．

4. 孤立系における準静的過程

次に，孤立系における**準静的過程**では，エネルギーの増加が，受けた仕事となることを示す．

時刻 $t=0$ から出発して $t=T$ までに，外部変数 $a(t)$ をゆっくりと変化させる．外部変数としては例えば，容器の体積などが考えられる．系のハミルトニアン $\mathcal{H}(\Gamma,a)$ は一般に外部変数 $a(t)$ に依存し，外部変数 $a(t)$ をゆっくりと変化させたときに，系のハミルトニアン $\mathcal{H}(\Gamma,a)$，すなわち，系のエネルギーがどのように変化するかを見てみる．例えば，$a(t)$ を初期値 $a(0)=a$ から時刻 T において $a(T)=a+\Delta a$ となるようにする．すなわち，$a(t)=a+\dfrac{\Delta a}{T}t$ とおく．$a(t)$ を時間変化させたときに，時刻 $t=0$ から時刻 T までの間のエネルギーの増分を ΔE とすると，

$$\begin{aligned}\Delta E&=\mathcal{H}(\Gamma(T),a(T))-\mathcal{H}(\Gamma(0),a(0))\\&=\int_0^T dt\frac{d}{dt}\mathcal{H}(\Gamma(t),a(t)).\end{aligned}$$

右辺の時間微分は

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}(\Gamma(t),a(t))=\sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}+\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}\right)+\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial a}\frac{da}{dt}$$

となるが，正準方程式

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}$$

により，上の右辺の第一項はゼロとなり，

$$\Delta E=\int_0^T dt\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial a}\frac{da}{dt}$$

が得られる．となる．上の定義より $\dfrac{da}{dt}=\dfrac{1}{T}\Delta a$ であるから，エネルギーの増加に対して

$$\Delta E=\frac{\Delta a}{T}\int_0^T dt\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial a}=\Delta a\overline{\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial a}}$$

が得られる．例えば，a として容器の体積とすれば，熱力学においては，孤立系の準静的変化に対しては，$\Delta E=-P\Delta V$ であるから，この時間平均は圧力と同定される．こうして，孤立系の準静的変化に対する熱力学の式が得られる．

5. エントロピー

エルゴード性を仮定すると，時間平均は相空間における分布関数による平均値と同定される．

$$\begin{aligned}\overline{\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial a}}&=\left\langle\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial a}\right\rangle\\&\equiv\frac{\int d\Gamma\delta(E-\mathcal{H}(\Gamma,a))\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial a}}{\int d\Gamma\delta(E-\mathcal{H}(\Gamma,a))}\end{aligned}$$

で定義する．

しかしながら，我々が知っている熱力学の式は，$\Delta E=-P\Delta V+T\Delta S$ であり，前節の結果は，孤立系における準静的過程においてはエントロピーが変化しない，ということを述べている．そこで，エントロピーの定義は次のようになる．まず，エネルギー $\mathcal{H}(\Gamma,a)$ が E 以下である相空間の体積を

$$\Phi(E,a)=\int_{\mathcal{H}\le E}d\Gamma$$

とすると，

$$\frac{\partial\Phi}{\partial E}=\int d\Gamma\delta(E-\mathcal{H})\equiv\omega(E,a),$$

ならびに

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial a}&=\int d\Gamma\delta(E-\mathcal{H})\left(-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial a}\right)\\&=-\omega(E,a)\left\langle\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial a}\right\rangle.\end{aligned}$$

よって，

$$\Delta\Phi = \omega(E,a)\left(\Delta E - \left\langle\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial a}\right\rangle\Delta a\right).$$

これは，一般的な式であるが，次のように書き換えてみよう．

$$\Delta E - \left\langle\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial a}\right\rangle\Delta a = \frac{\Delta\Phi}{\omega}.$$

$\dfrac{\partial\Phi}{\partial E} = \omega(E)$ であることを使い，

$$\frac{\partial(k\ln\Phi)}{\partial E} = \frac{1}{T}$$

とおけば，$S = k_{\mathrm{B}}\ln\Phi$ とすることができる．このとき，

$$T\Delta S = \Delta E - \left\langle\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial a}\right\rangle\Delta a$$

となる．

つまり，エントロピー $S(E,a)$ は相空間におけるエネルギー $\mathcal{H}(\Gamma,a)$ が E 以下の領域の体積によって与えられる．

一般には，熱力学的極限，すなわち，エネルギー E，体積 V，粒子数 N の大きな極限で $S \simeq k\ln\omega(E,a)$ でも良いということになる．これが，ミクロカノニカル集団の考え方である．ここで，私自身は，統計力学の導入として，エルゴード性からミクロカノニカル集団による平均値の計算をするところまでは，納得できても，相空間の体積 $\Phi(E)$ もしくは $\omega(E)$ からエントロピーを導入して熱力学に対応させることに，違和感を感じるのである．なぜなら，エルゴード性とは孤立系の力学に関する概念であるからである．

一方，エントロピーが意味を持つのは，エネルギー E の状態数と $E+\Delta E$ の状態数を比べることによって，温度 T が表されるからである．ところが，エネルギーを変化させて状態数が変化する様子を，力学系で表現することは不可能である．状態数の変化は，外からの擾乱によるものであり，熱源の運動を導入しない限り考えない実現不可能である．

状態数が意味をもつためには，エネルギー E と個々の「状態」との対応が必要であり，ミクロカノニカル集団は結局量子力学によって初めて正当化されるのではないだろうか．つまり，自然に何も好みがなければ，個々の量子状態の実現はランダムであり，結局個々の量子状態に同じ重みをつけざるを得ない，すなわち，等重率しか選択の余地がない，ということになる．

6. 古典力学からカノニカル集団へ

したがって，古典力学における孤立系のエルゴード性を第一原理とするならば，孤立系にエントロピーを導入するのではなく，熱源と系の全体を孤立系として，エルゴード性によってミクロカノニカル集団を全体系に適用して，それから系のエネルギーの分布を導いて，カノニカル集団を導くほうが，論理的であるように思われる．

実際には，N 個の粒子からなる系と N_{bath} 個の粒子からなる系（熱源）を考え，$N_{\mathrm{bath}} \gg N$ とする．粒子数が $N_0 = N + N_{\mathrm{bath}}$ である系全体に対しては，ミクロカノニカル集団が成り立つとする．全体のハミルトニアンは 2 つの系のハミルトニアンの和 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_N + \mathcal{H}_{\mathrm{bath}}$ であるとする．実際には 2 つの系の間の相互作用 $\mathcal{V}$ があるが，$\mathcal{V} \ll \mathcal{H}_N + \mathcal{H}_{\mathrm{bath}}$ として無視する．また，2 つの系の間の粒子の交換はないものとする．そうすると，分子の状態についての確率分布は，全体のエネルギーが E ならば，

$$P(\Gamma_N, \Gamma_{\mathrm{bath}}) \propto \frac{\delta(\mathcal{H}_N + \mathcal{H}_{\mathrm{bath}} - E)}{\omega(E, N, N_{\mathrm{bath}})}$$

となる．ここで，規格化定数

$$\omega(E, N, N_{\mathrm{bath}}) = \int d\Gamma_N \int d\Gamma_{N_{\mathrm{bath}}}\delta(\mathcal{H}_N + \mathcal{H}_{\mathrm{bath}} - E)$$

は状態密度という意味をもつ．つまり，全系のエネルギーが E と $E+\Delta E$ の間にある相空間の体積を $\omega(E)\Delta E$ とおくことに相当する．また，熱源についての状態密度を

$$\omega_{\rm bath}(E-\mathcal{H}_N, N_{\rm bath}) \equiv \int d\Gamma_{N_{\rm bath}}\delta(\mathcal{H}_{N_{\rm bath}}+\mathcal{H}_N-E)$$

と定義する．そうすると，

$$\omega(E,N,N_{\rm bath}) = \int d\Gamma_N \omega_{\rm bath}(E-\mathcal{H}_N, N_{\rm bath})$$

と表せる．よって，N 個の粒子からなる系の確率分布は，

$$P(\Gamma_N) = \int d\Gamma_{N_{\rm bath}} P(\Gamma_N, \Gamma_{N_{\rm bath}}) = \frac{\omega_{\rm bath}(E-\mathcal{H}_N, N_{\rm bath})}{\int d\Gamma_N \omega_{\rm bath}(E-\mathcal{H}_N, N_{\rm bath})}.$$

次に，熱源の状態密度について次のような関数を導入する．

$$S_{\rm bath}(E-\mathcal{H}_N, N) = k_{\rm B}\ln\omega_{\rm bath}(E-\mathcal{H}_N, N_{\rm bath}).$$

そうすると，

$$S_{\rm bath}(E-\mathcal{H}_N, N_{\rm bath}) \simeq S_{\rm bath}(E, N_{\rm bath}) - \mathcal{H}_N\frac{\partial S_{\rm bath}}{\partial E} + \cdots.$$

ここで，熱源の温度 T を

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S_{\rm bath}}{\partial E}$$

で定義すると

$$S_{\rm bath}(E-\mathcal{H}_N, N_{\rm bath}) \simeq S_{\rm bath}(E, N_{\rm bath}) - \frac{\mathcal{H}_N}{T} + \cdots$$

となる．よって，

$$\omega_{\rm bath}(E-\mathcal{H}_N, N_{\rm bath}) = \exp\left(\frac{S_{\rm bath}(E, N_{\rm bath})}{k_{\rm B}} - \frac{\mathcal{H}_N}{k_{\rm B}T} + \cdots\right)$$

と近似される．こうして，カノニカル集団における確率

$$P(\Gamma_N) = \frac{e^{-\mathcal{H}_N/k_{\rm B}T}}{\int d\Gamma_N e^{-\mathcal{H}_N/k_{\rm B}T}}$$

が求まるのである．つまり，系と熱源の全体を孤立系として，ミクロカノニカル集団を用いたときに，系の状態を表す変数 Γ_N だけで見ると，一様に分布するのではなく，エネルギーの高い状態は低確率，低い状態は高確率，というふうに濃淡ができる．力学的にいえば，孤立系では準静的過程ではエントロピーが変化しないので，エントロピーの変化分で定義する温度の導入は苦しいところがある．よって，温度の導入は，熱源の存在の下，つまり，カノニカル集団で考えるのが自然のように思われる．

7. 断熱過程について

量子力学では，ゆっくりとした外部条件の変化では，量子遷移が起こらず，そのことが，断熱不変量としての状態数につながる，と考えられている．しかし，巨視的な系を考察するときに，壁などの巨視的な条件の準静的変化でエントロピーが増えないことが，量子力学における断熱過程と同じなのだろうか．粒子数が多ければ，エネルギー準位の縮退度は大きく，遷移が起こりやすくなっているように思われる．そう考えると，はたして，量子力学における断熱定理と熱力学における準静的断熱過程とは違う理屈なのではないだろうか．

これは，量子力学と統計力学の講義をするとき，いつも気になっていることである．

参考文献

1) 北原和夫,『非平衡系の統計力学』(岩波書店，1997).
2) J.R. Dorfman, “An Introduction to Chaos in Nonequilibrium Statistical Mechanics” (Cambridge U.P., 1999).
3) R. Becker, “Theorie der Wärme” (Springer, 1978).

(きたはら・かずお，東京理科大学大学院科学教育研究科)

ポアンカレ『科学と仮説』をひもとく

黒川 信重

来年，歿後百年を迎えるポアンカレ（1854–1912）は数学だけでなく万能の科学者として有名である．『科学と仮説』はポアンカレが48歳の1902年に一般の科学愛好者向けに書き下ろした．その後『科学の価値』（1905），『科学と方法』（1908）が発行され三部作となっている．数論を研究している私にとっては，三番目の『科学と方法』にある保型関数発見のエピソードがポアンカレに接した最初だったように思う．それは，非ユークリッド空間に作用するフックス群とその保型関数について考え続けていたある日，馬車に足を掛けた一瞬にすべてが見えた，という成功譚であって，憧れを抱いたものである．

本書を手にして読むのは久し振りである．ポアンカレの記述はゆっくりとしかも明晰であって，科学における仮説の意義を充分に堪能できる（なお，現在のところ，『科学と方法』は岩波文庫で入手可能であるが，『科学と仮説』，『科学の価値』は，古本を捜すことになるという残念な状況にある．出版社の御高配をお願いしたい）．

さて，本書『科学と仮説』を岩波文庫所収の河野伊三郎訳によってひもとこう．構成は次の通りである：

第一篇　数と量（第一章　数学的推理の本性，第二章　数学的量と経験），
第二篇　空間（第三章　非ユークリド幾何学，第四章　空間と幾何学，第五章　経験と幾何学），
第三篇　力（第六章　古典力学，第七章　相対的運動と絶対的運動，第八章　エネルギーと熱力学），
第四篇　自然（第九章　物理学における仮説，第十章　近代物理学の理論，第十一章　確率論，第十二章　光学と電気学，第十三章　電気力学，第十四章　物質の終り）．

まず，第一章では，数学における最も根幹となる仮説である「数」と「量」の分析から始まっている．自然数の成り立ちと加法・乗法・帰納法の研究にじっくりと時間をかけている．数学の秘密が帰納法（本書では「出直し法」とも呼ばれている）にあることを明確にして次のように述べている：「将棋指しはあらかじめ四手，五手を組合わせることはできる．しかしどんな非凡な名人であろうとも，いつになっても有限数の指し手しか考えられない．もしその人がその才能を算術に適用したとすれば，ただ一度の直接的直観によって一般的真理を見抜くことはできない．どんなに小さい定理を得るためにも，出直し法の推理の助けをかりずにはいられない．なぜかといえば，これが有限から無限に渡りをつける道具だからである．」「物理学に適用される帰納法はいつでも不確実である．なぜかといえば，これは宇宙の普遍的秩序，すなわち我々の外にある秩序，に対する信念に基づいているからである．これと反対に数学的帰納法，すなわち出直し法による証明は必然的に服従を強制する．なぜかといえばこれは理知自身の一つの性質を肯定したものにほかならないからである．」

第二章は「実数」（デデキントの切断を用いている）や「多次元の連続」を考察して空間論・幾何学の入り口に至る．例えば，点と線について：「純粋幾何学者はさらに努力を加える．すなわち全く自分の感官の助力のみには頼ろうとしないで，幅のない線，広さのない点の概念に達しようと欲する．」

続いて，第三章から，非ユークリッド幾何学の発見への歴史とその意義の話が始まる．とくに，ユークリッド（訳書では「ユークリド」）幾何学（紀元前300年頃にアレクサンドリア大図書館にてユークリッドが執筆した『(幾何学) 原論』に纏められた）において提出された「直線とその直線以外の点が与えられたとき，その点を通る平行線が唯一つ存在する」という「ユークリッドの第五公準」が，二千年以上経った19世紀になって如何に変貌したかが詳しく語られている．ロバチェフスキーの幾何学（平行線が無限個引ける；曲率が負）とリーマンの幾何学（平行線がない；曲率が正）

という2種類の非ユークリッド幾何学が対比されている．さらには，非ユークリッド的世界における居住者の体験を分析して「もしこれらの人間が幾何学を建設すれば，それは我々の幾何学のように変形しない固体の運動の研究ではなく，かれらがこの意味で識別するようになった位置変化の研究であろうし，そうすればこれは「非ユークリド的移動」にほかならないのであるから，その幾何学は非ユークリド幾何学であろう．して見ると我々のような人間で，その教育がこういう世界の内で行なわれたものは，我々と同一の幾何学を有しないことであろう．」と述べている（第四章）．

このようにして，段々と物理学の世界に近づいていくのであるが，この調子では，全体を見開き2ページでひもとくことは不可能に思える．第九章「物理学における仮説」と最後の第十四章「物質の終り」からほんの僅かだけ引用し，あとは読者が直接読まれる楽しみとしたい：

「先入見をすっかり無くして実験しなければならないとは，よく人のいうことである．それは可能でない，それはあらゆる実験に結果を生まないようにさせるばかりでなく，人になし得ないことを欲するものである．」（第九章）

「こうしてくつがえされた仮説は結果を生まなかったか．それどころではない，こういう仮説は本当である仮説よりももっと余計に役にたったといえる．この仮説はただ決定的な実験の機会になったというばかりでなく，なおそのうえ，もしこういう仮説を作らないで偶然この実験を行なったのだったらば，何も結果を引き出せなかったろうし，そこに何も異常なことがあるとは気がつかなかったろうし，少しも帰結を導き出せないような一つの事実を目録に加えるだけだったろう．」（第九章）

「この最近の数年間に物理学者の報告した最も驚くべき発見の一つは，物質が存在しないということである．ただしこの発見がまだ決定的なものでないことを忘れないうちにつけ加えておこう．物質の本質的な属性はその質量であり，その慣性である．質量とはどこにあっても，いつになっても恒常のままであって，化学変化がその物質の知覚し得るあらゆる性質を変えてしまって，その物質を別の物体にしてしまったように思われるときにも存続するものである．だからもし質量すなわち物質の慣性が実在においては物質に属するものでないこと，質量は物質が自分を飾る借りものの装飾であること，この質量，特にその恒常性までも，が変化を受けることが証明されるようになったとすれば，物質は存在しないといってもさしつかえはなかろう．ところでちょうどそのことが報告されたのである．」（第十四章はじめ）

「この問題は少し前までこういう状態であったが，そこにカウフマン氏は新しい実験を発表した．陰の電子はその速度が破格だからフィッツジェラルドの短縮を受けなければならない．そうして速度と質量との関係は，そのために変更を受けるはずである．ところが最近の実験はこの予想を確認しない．そうするとすべてはお流れになってしまって，物質はまたその存在の権利を持つことになる．しかしこれらの実験は精細微妙であって，今日のところまだ決定的な結論を与える時期ではあるまい．」（第十四章おわり）

このように読んでくると，とくに，終わりの第十四章「物質の終り」から見ると，本書が出版された1902年という年は「夜明け前」であったという感を再認識する．これは，『科学と仮説』の1902年から『科学と方法』の1908年までの6年間が科学の歴史上でも稀な激動期であったことが理由として挙げられるであろう．誰でも気付くのは「奇跡の年」1905年のアインシュタインの三部作「光量子論」，「ブラウン運動の理論」，「特殊相対性理論」が風景をすっかり変えてしまったことがある．また，ポアンカレ自身の研究においても，「単連結な3次元閉多様体は3次元球面のみ（同相）である」という『ポアンカレ予想』を提出したのは1904年だった．このようにして，ちょうど百年前の1911年版『科学と仮説』を書き遺して欲しかった，という思いが込上げて来る．

なお，数学においても仮説の意義を問う動きは現在も活発に続いている．ユークリッドの出発点であった「点とは部分を持たないもの」を考察することは最も重大な点であり，その方向の研究として，一元体という根源体から出発する『絶対数学』が，2009年以来コンヌの非可換幾何学も流れ込みリーマン予想の解明も目指して進展している．その一端は次の本で見られたい：

黒川信重・小山信也『絶対数学』日本評論社，2010年9月．

（くろかわ・のぶしげ，東京工業大学大学院理工学研究科）

エーテル仮説と特殊相対論



佐藤 文隆

1. 電磁気学：波動には媒質が必要

最近，自分にとっては言わずもがなと思うことが全く読者に共有されていないことに気付くことが多い．そこで本稿では，“言わずもがなのこと”をまず書いて，しかる後に筆者が言いたいことを述べることにする．

エレクトロとは琥珀，マグネとはギリシャの磁石鋼を産出するマグネシアという地名である．電磁気の発端が静電気，静磁気であったことを教えてくれる．19 世紀初めに電池が発明され，電流が磁気を作ることが発見され，電磁誘導などを組み込んだ，電気と磁気の動的な統一理論が 1859 年にマックスウェルによって完成した．この際，19 世紀初めに干渉効果で確認されていた光の波動説に，その波動が電磁波であるという確証を与えた．具体的には電磁気学の中に他の実験で測定されていた光速が組み込まれていた．

マックスウェルが諸々の実験的知見を数理理論にまとめ上げる際に描いたのは**弾性体**の理論である．最近は，物理学を修めたという学生でも，ほとんどこの理論を勉強してないが，結構，高度な数理理論である．並進と回転という運動群の部分を変位から取り除いて弾性に固有の変位が定義される．ミクロの物理の勉強に急いで向かわねばならない現代の学生には，運動学と力学の交錯するこの古典物理の精華を勉強する暇がないのは残念である．そこで，古典物理の達人マックスウェルが弾性体理論と電磁気学が如何に近い存在かを悟った勘どころを味わうのは無理かもしれない．

ここでは定性的に，歪のエネルギーとは弾性体というモノ（**媒質**）を前提としたコト概念であることの確認に止める．モノの上に“歪みのある状態”というコトが生起するのである．そして次の課題は，エネルギーを担う電気と磁気はモノなのか媒質上のコトなのか？ というものである．音波の波動説とパラレルに考えれば，光の波動説にはその媒質が必要であるとなり，それを**エーテル**と呼ぶようになった．現代的には光も電磁場もモノであるが，当時はモノとは質量のあるものであったから，電磁場のエネルギーはエーテル媒質の歪エネルギーというコト状態としてイメージされた．こうするのが大半の専門家にとっては電磁場という新存在を既成概念の中に収めておく便法だったのである．

2. エーテルの流れ

しかしこの一見常識的な態度に見えるエーテルを真面目に考え出すと常識には収まらない矛盾だらけであった．このため，大半の専門家のイメージであったにも拘らず，誰も体系的なエーテル理論を提案しなかった．矛盾の一つは，光速が大きいことは，弾性体論的に言うと，エーテルが超硬質であることである．なのにこの硬質媒質の中をスイスイと物体が貫通しており，またこうした運

動で音波に相当するものを発生させるわけでもない．当時の物理学の完全に埒外のものであった．

真空と考えられる空間を光が伝播してきて星が見えるのだから，宇宙全体にエーテルという媒質が敷き詰められている，となる．すると，この媒質静止系に対して運動しながら光波を観測することで，**エーテルの流れ**を検出するという課題が生まれる．エーテルがあればニュートンがイメージした絶対静止系としても使える．

マイケルソンたちの干渉系実験はこうした素朴なエーテル・イメージを動機で行われた．またこの分かりやすい動機での彼らの実験は，その光学実験技術の驚異的な精度へのハイテク的注目度と重なって，科学のメジャーな話題であった．1887年頃までに下された結果は「エーテル流は検出不可」という否定型であったが，その熱い探究心で引き上げられた実験技術への賞賛はマイケルソンにアメリカ人として最初のノーベル賞（1907年）をもたらした．この光栄もあって，現代物理学の大法則である相対論が彼らの実験結果をもとにアインシュタインによって発見されたとする物語が物理学の正史になっている．

しかしこれは「実験によって理論が構築される」とする素朴な科学論のおとぎ話であって，現実の歴史とは相当違っている．まず，マイケルソンのノーベル賞のサイテーション “for his optical precision instruments and the spectroscopic and metrological investigations carried out with their aid” である．そしてノーベル賞講演でも分光学精密化の実験技術の話をしており，**マイケルソン・モーレー実験**には触れていない．1907年ではまだ1905年論文の評価が学界で広まる前だから当然といえる．アインシュタインが1911年のソルベー会議に招待されるなどして欧州物理学界でメジャーになっていくのは光量子論によってである．プランクなどの体系重視の理論家の一部はすぐに特殊相対論を評価したが，相対論が物理学全体の革命理論とか言われ出すのは「1919年の事件」以後のことである．

また，1905年のアインシュタイン論文ではマイケルソンの実験は全く登場しない．ただし相対論が話題になってから，相対論の前駆としてマイケルソンの実験が広く語られた．アインシュタインがアメリカを訪問，年老いたマイケルソンのいるキャルテックを訪問した際の歓迎会で，主賓アインシュタインの隣にマイケルソンを関係者は座らせたが，アインシュタインは挨拶の中でマイケルソンに一言も言及しなかったので落胆したという話しが伝わっている．

3. アインシュタインの動機と手法

1905年の相対論の論文には引用文献が一つもなく，現在見ても全く時代を感じさせない．論文のつながりとしてある学界の論議に参加するという姿勢ではなくて，宇宙人の立場で「みなさん見方が間違ってますよ」と言わんばかりである．

ではアインシュタインの動機は何であり，実験結果でないなら何を指導原理としたのか？ まず，動機は明白で論文の標題「**運動物体の電磁気学**」に表明されている．電磁気学の方程式がガリレオ変換の相対性原理を満たしていない．このため，力学理論との理論的整合性の問題がある．「光の伝搬する媒質に対する地球の運動を見出そうとする試みの失敗と考え合わせるならば，電磁気学の現象が力学過程と同様に絶対静止の概念に対応するような種類の性質を全然持っていないという事実を示唆していると言える」，だから「“光のエーテル” は全く余計なもの」であり，力学理論の**相対性原理（特別な慣性系不在の原理）**を維持する．そのためには，変換式は改変され力学の方程式も変更される．

次に何を指導原理としたかと言えば，**同時性**に対する徹底した**マッハ流の実証主義的概念批判**の手法である．離れた場所の同時性を定義する操作主義的な考察である．マイケルソンたちの実験結果と言える「運動系に拘らず光速度は一定である」は同時性の操作主義的定義を可能にする公理のような位置づけになっている．実験から20年近くも経った時期だから，常識に織り込まれていたと

も言える．そしてこの光速度一定の公理から演繹的にローレンツ変換が導かれ，またこの変換に対して電磁気学の相対性原理は担保される．

「同時性の操作主義的定義」という思考実験的手法がこの論文の特徴である．非局所概念である「離れた場所での同時性」が自明でないという宣言が核心である．「たとえば“汽車は7時にここに着く”と私が言うのは，次のことを意味している．“私の時計の短針が7を指す．そして汽車がここに到着するのがこれと同時的事件だ”と」．しかし腕時計が7を指す事件と遠くに見える汽車の到着が同時に見えても，遠くから光がやってくるのに時間を要するから，同時的事件ではない．そこで手元Aの時計で t_1 に発信し離れた場所Bで跳ね返って t_2 で戻って来たとすれば，Aでの時刻 $t_A = (t_1 + t_2)/2$ がBでの跳ね返り事件と同時的事件であると操作的に定義するのである．

これが1905年論文の流れだが，次節で述べるように，じつは運動系間の座標変換である**ローレンツ変換の式**にまつわる議論は1895年頃から始まっていて，1905年以前にそっくり同じ変換式が与えられていたのである．ローレンツ変換からは**運動系での長さや時間が伸び縮み**するという話が導かれるが，これらの物理的効果の話もアインシュタイン以前から存在していた．そのために「アインシュタインの相対論」がこれほど有名なのにその核心をなす変換式がアインシュタインの名で呼ばれないのである．なぜアインシュタイン変換やアインシュタイン群でなく，ローレンツ変換や**ローレンツ・ポワンカレ群**と呼ばれているのか考えてみるべきである．

4. ローレンツとアインシュタイン

それではローレンツとアインシュタインはどこが違うのか？ なぜ，後発のアインシュタインのほうがローレンツより大きなインパクトを与えたのか？ さらに1905年論文にはないが，あと知恵的に付加された相対論が物理学に対して持った核心的意義とは何か？ これらの問いに答えることこそが相対論の真価を理解することである．相対論を“エーテルを撲滅した”レトロなスーパーマン的なヒーローと位置付けるのでは，アインシュタインは可哀想である．エーテルの側から相対論を見てはいけない．

現在での物理学の学習の観点からはそれほど重要ではないことだが，歴史をひも解くと，「ローレンツ変換」，「運動で変化する質量」，「運動による長さの収縮」，「運動による時間の伸び」などという素人相対論に必要な小道具はすべてアインシュタイン以前に整っている．また「相対性原理」の定式化もポワンカレによるものであり，相対論という言葉も初めはポワンカレの考え方についたものだ．この歴史が，当時の大半の物理学者が特殊相対論の意義を実感できなかった理由である．仕上げ人と言えるローレンツとポワンカレの他に，ヘビサイド，フォークト，フィッツジェラルド，アブラハム，ラーモア，ランジュバンなどが登場する．背景には「電磁場のエーテル歪み説」と並んで「**粒子質量の電磁場エネルギー説**」があった．後者は量子電磁気学のくりこみ理論にまで持ち越され，うやむやに沈静化した．

本誌「物理と仮説」特集で筆者に振られた「エーテル仮説と特殊相対論」に期待されたのは，もしかしたらこの時代のゴタゴタ物語を描くことだったのかも知れない．しかしそれは，あたかも1960年代の素粒子物理展開での理論のゴタゴタ物語をみるようなもので，初心者には役立つ話ではない．両者に共通して言えることは，実験に活気があって，ゴタゴタした理論展開を引っぱったということであろう．何れにせよ，アインシュタインはこれらのゴタゴタ物語に深くコミットすることなく，宇宙人のように御宣託を下したのである．

相対論以前に書いたローレンツの『**電子の理論**』（The theory of electrons and its applications to the phenomena of light and radiant heat）という教科書が1950年代まで広範にそのまま売れ続けたという．この本を見るとあちこちにエーテルという言葉が登場する．エーテルが如何に19世紀物理の大前提であったかが分かる．電磁波と電

子系の作用の物理にはこの流儀が便利だったからであろう．

第二回ノーベル賞を受賞しているローレンツは，単発の発見者というよりも，当時はヨーロッパ物理学界の教師としての尊敬を集めていた．ローレンツ自身は，プランクと並んで，相対論の革新性を早期に評価した人物である．このため，ローレンツは自著のあちこちにノートや脚注をつけてアインシュタイン流への読み替えを補足した．しかし，本文の数式や式の展開などを改訂する必要はなかった．このことは，物理学を使う立場の大半の物理学者にはアインシュタインは単なる「見方の変更」をやったに過ぎないという印象を与えた．この「見方の変更」論を打ち破るには一般相対論までいって重力理論の数式まで変えてみせる必要があったと言える．また，相対論のアインシュタインが超有名になった「1919 年の事件」以後にも拘らず，彼への 1921 年度ノーベル賞のサイテーションに，「光電効果」が登場し，「相対論」という言葉が登場しない理由の一つだった．

5. 新原理へ：対称性の発見

「科学とは権威がこけていく物語である」と筆者はよく言っている．因みに“こける”とは関西弁で失敗して退場していくという意味である．この“こけていった”悪役の典型例としてフロギストンとエーテルが引合に出されるが，どちらもこの科学正義物語の引き立役として人々の記憶から消えないだけで，実際には地動説のように悪役にふさわしい強力さがあったわけでもない．

ともかく，こういう後ろを見ながら相対論を語ることを止めて，特殊相対論は「見方の変更」に過ぎないなどという陰口を吹き飛ばす，まっさらなセールスポイントが語られるべきである．“何も仕事をしない”という批判を真っ向から崩してみせるには，**4 次元空間**，**静止質量**，**スピノール**，**スピン**，**反粒子**，**量子統計**，などの新物理概念導入である．一言でいえば**4 次元時空に備わった対称性の発見**である．スピノル，ベクトル，テンソルなどと，時空対称性は時空に存在できる物理量のタイプを規定している．まさに群論的変換則が物理的存在を演繹するのである．

筆者は，学部学生向きの相対論の教科書を書く際に特殊相対論にローレンツ群の表現としてのスピノールを書き込むことに拘った．普通の教科書ではスピノールは量子力学に入ってから登場するものとなっている．しかしスピノールは，プランク定数とは無関係で，(非量子的) 特殊相対論の産物である．もちろん，場の量子論にいって個数表示まですると，量子統計法則が導かれる．パウリ禁止則もローレンツ変換に基礎があると言える．

6. 対称性と保存則

対称性と言うと体系重視の理論家の単なる格好づけのように響くが，ネーターの定理を通じて動力学と密接に関連している．今では，初等力学は必ず質点の力学から始まり，拘束，剛体，弾性体，流体には進まずに終わってしまう．これは 19 世紀末から，巨視物体の背後に原子・分子の運動を見るようになると，質点の力学が世界の基本運動モードであると見る錯覚に囚われているからである．ラグランジュやハミルトンによる解析力学は原子・分子時代以前のものだから，運動とは，3 次元空間内の質点の移動ではなく，一般座標で表される状態空間の状態点のハミルトン流のことなのである．“お子様向きの物理”ではなく，「自然をありのままに見ない修行」だったのである．

対称性を記述する群論の要諦は「変換しても不変」である[1]．この「不変」が，図形的な合同から，ガロアが出会ったように，方程式に含まれる項の置換変換での「不変」に拡大される．解析力学のラグランジアンから計算される作用積分の連続群の不変性が力学での対称性の基点となる．一方，この作用積分の最小作用原理が運動方程式を演繹するために，極値条件と不変性が交錯して**ネーターの定理**が導出される．不変に留めるリー群の生成子と運動方程式の関係が発生し，保存則が演繹される．普通は，運動に沿って何々は保存すると表

現するが，何々が保存するならば運動はこうなると言ってもいいのである．

3次元空間の一様性（並進対称性）と等方性（回転対称性）に加えて，時間の一様性と時間・空間にまたがるローレンツ対称性，これらすべてを含めたポワンカレ対称性が群を構成する．**4次元ミンコフスキー時空の並進と回転（ローレンツ変換も虚数角度のローレンツ変換）という対称性**である．3次元空間の並進対称性が運動量保存を，3次元空間回転対称性が角運動量保存を，時間並進対称性がエネルギー保存を，ローレンツ対称性は重心運動の保存を，各々導く．

エーテルというモノ的な実体を空間から取り去ったが，時間空間の枠組みは無限定の容れ物ではなく，時空対称性という厳格な縛りのかかった物理的実体としてここで登場する．物理学の基本法則のように思えたエネルギー保存則も時空対称性原理から演繹される2次的な資格に格下げされる．

7. 保存則とアイデンティティ

この対称性と保存則の関係は，連続変換の時空対称性を越えて，非連続時空対称性（パリティー，正反粒子など），荷電や素粒子の他の量子数（カラー，フレーバー，バリオン，レプトンなど）の保存則を各種の対称性として捉える方法として重要な原理になっている．また，群論で扱う手法は，原子や原子核の特殊な物理モデルに内包されている対称性を使ったエネルギーレベルの構造の研究にも威力を発揮した．

一部の保存する生成子は物の属性に変身する．時刻が違えば一般的には別物である状態の間に，不変に止まる変数が存在することを理由にしてアイデンティティを所有するモノを導入するのである．「保存する」をモノのアイデンティティと拡大解釈するのである．属性というとモノ的意味は，対称性という関係性を介して，「保存する」というコト的意味と相互に読み替え可能になる[2)]．

異なる時刻の状態空間のコレクションから，2次的に属性を保持するモノを創出する．素朴に分りやすい運動のイメージをひっくり返すこうした見方は，一見強引な逆転した見方に過ぎないと思えるであろう．しかし，属性を携えたモノがトータルに五感的には見えないミクロの世界の記述に移行する際には逆転の発想が重要になる．**量子力学**の多くのパラドックス的な事象は「属性を所有したモノという実体がそこにある」を出発点にすることの不可能性を教えている[3)]．プランク定数の有限性で群の生成子の交換関係が変更を受け，属性化されていたモノの特性の一部を状態量に返還せねばならないのである．

「エーテル仮説と特殊相対論」からは遠く離れてしまったようだが，**特殊相対論が対称性原理の出発点**だったと位置付けると，話しは現代物理の大半を含むようになる．もちろん小文では漠然とした説明になるが，特殊相対論を「時間や空間の伸び縮み」という素人相対論であると思うよりは，はるかに相対論の核心をつかむことになる．

8. ゲージ理論と対称性の破れ

時空の異なる点での対称性変換を関係させる任意性に応じてゲージ場が導入される．**一般相対論**はじつは**ローレンツ対称性のゲージ場理論**である．ゲージ場の発想はワイルに由来するが，物理に登場したのは電磁場のゲージ理論としての見方を一般化したヤング・ミルズ理論である．一般相対論もゲージ場として再発見された．

デカルトは幾何問題を座標系を使って解く手法を導入したが，座標系の取り方は任意であり，対象を数字化するゲージ（物差し）に過ぎない．ゲージが違えば数字は違うが，**幾何学的関係**はゲージの取り方に依存してはならない．ここで「幾何」を「物理現象」に置き換えると，「法則を一般座標変換に不変な形に表現する」となる．一般相対論は1978年頃に完成形を見た**素粒子相互作用の標準理論**をゲージ理論としては先取りしていた．

古典的なゲージ理論はスッキリしているが，クォーク・レプトンの場と力のゲージ場を量子論で扱う際に最低エネルギーの「真空」を設定せね

ばならない．ここで標準理論のもう一つの柱が**自発的対称性破れ**（**相転移した真空**）であるがいつまでも基礎が定まらない．対称性原理という枠組みは保持しつつ現実は「破れた対称性」の状態にあるという，もともと明確な原理のないパラダイムである．LHCでヒッグス場の存在が決着しそうもないとなると先行き不透明になる．そこに来て，膨張宇宙の観測で加速膨張が発見され有限の真空エネルギーが語られている．こうして宇宙空間全体に敷き詰められた真空場が復活する．あたかも相対論的エーテルの復活である．

場の量子論の真空の奇妙さは**カシミア効果**，**ホーキング放射**，**ウンルー放射**などとして様々に指摘されている，現在の場の理論はアインシュタインの「同時性の定義」を頑なに受継いだ局所場理論である．ここでは基本的には差額を問題にするくりこみ理論で処理されている．絶対的な底が見えない上げ底理論である．そこに膨大なエネルギーの熱浴のようなエーテルがイメージされる．

素粒子の世界では対称性は厳密には成り立っていない．モノの質量概念を素粒子場のある種の振動モードに付けられた名前であると換骨奪胎された．筆者らは1978年に対称性破れによる「**統一された力の分岐図**」を提唱した[1]．また，どんな対称性も，厳格には成立してないとなると，ローレンツ対称性にも限界があるべきだとなる．1972年，筆者はその現象を最高エネルギー宇宙線と関連付けて論じたことがある．19世紀のエーテル流もベクトル量の宇宙的存在であった．スカラーであるヒッグス場には方向性はないが，もし自発的対称性破れで方向性をもつ真空場になれば**相対性原理の破れ**がある．実際，宇宙背景放射は特殊な慣性系を特定しており，これが単に運動学的意味か，動力学的意味があるのか不明である[5]．

9. 作業仮説と隠れ蓑

実験にしろ理論にしろ，仮説を立てて検証してみる過程は様々なレベルで始終行なわれている．日に数回のものから数年にわたるもの，科学の理論から株の投資予想まで，いろいろある．この特集での仮説は，個人的なものでなく，業界挙げて暫らくこれでやってみるという，業界公認の仮説のことであろう．研究論文の公表基準のことであり，公開の仮許可証を発行して業界振興を図っているものである．自然そのものとの交流が欠落してしまった標準理論以後の素粒子論などはこの仮許可証だけで動いているが，自然主導であるべき物理学が，既成権威化した業界団体の手にゆだねられているのは由々しきことである．

他の知的営みと凌ぎを削って，社会的信用を獲得して来たのが19世紀後半の科学である[6]．そこでは，既成権威化した従来の大学や宗教界に巣くう知的集団の文献や過去の言説だけを見て行う学問的営みを痛烈に批判した．新興科学側の提案は，真理の審級を神や伝統権威から実験で交流されている自然に移すことであった．仮説に基づく問いかけを実験で行ないながら，数理的合理性の基準で法則を構築していくのが実際の過程である．「エーテルから相対論」というお伽話は科学のあるべき姿の語りといえる．

しかし，アインシュタインの教訓は仮説はあくまでも実験や方程式を立てる際の作業仮説であるべきだということである．仮定がすべて，改良されるべき原型だと拘るべきではない．原型だとなると**既成権威業界の隠れ蓑**になる．

参考文献

1) 佐藤文隆,『破られた対称性』, PHP サイエンス・ワールド新書，2009 年.
2) 佐藤文隆,「存在から関係へ」, 現代思想（青土社），2011 年 4 月号.
3) 佐藤文隆,『量子力学は世界を記述できるか』, 青土社，2011 年.
4) 数理科学,「特集　真空：その真実と物理像に迫る」, 2002 年 9 月号.
5) 佐藤文隆,「ローレンツ変換の破れ」, 数理科学，2010 年 12 月号 46–52p.
6) 佐藤文隆,『職業としての科学』, 岩波新書，2011 年.

（さとう・ふみたか，甲南大学，京都大学名誉教授）

特集／物理と仮説

仮説・予想・公理・公理系



八杉 満利子

1. 仮説と予想

仮説，予想，公理，公理系は様々な場面において出会うことばだ．それぞれの定義や例やその歴史はインターネットでも簡単に検索できる．ここでは数学に限定してこれらのことばの使われ方と役割について私なりの解説をしよう．

これらのことばは数学の対象物（数，関数，方程式など）についての言及ではなく，ある命題（何らかの主張の文章化）についての数学の実践における役割を語ろうとするものである．その意味で数学についてのメタ表現と呼んでいいだろう．

仮説は英語の hypothesis の和訳だ．ただし hypothesis には仮定とか前提という意味もある．「仮説」は文字どおり仮に正しいとして提案される数学の命題を指す．仮説は数学のある分野全体に適用する目的で立てられる，グローバルな仮定ともいうべきものだ．仮定・前提はその場限りのローカルな前提といえる．例えば「閉区間 $[0,1]$ 上で連続な関数 f はその区間で最大値をもつ」という定理では「関数 f が当該区間で連続である」という仮定（前提）の下に結論を主張している．この仮定はこの定理の中だけで適用される．

仮説で有名なのが continuum hypothesis（連続体仮説）や Riemann hypothesis（リーマン予想）だ．英語表現を先に書いたのにはわけがある．前者は確かに「仮説」と呼ばれているが後者は日本語では「予想」だ．前者は集合に関する理論体系で肯定も否定もできないことが示されている．詳細についてはこの特集の別のコラムをご覧いただきたい．後者は仮説といっても「成り立つはずだ」という信念あるいは希望の下に扱われていて，将来的には定理になることが「予想」されている．

予想は英語の conjecture に対応する．conjecture の通常の意味は推測とか憶測なのだが，conjecture と呼ばれる命題は多くの数学者たちが正しいと信じ，証明しようとしているものだ．Riemann hypothesis も Riemann conjecture のほうがふさわしいかもしれない．$P \neq NP$（計算の複雑度の分類に関する命題）や Goldbach conjecture（2 より大きい偶数は 2 個の素数の和に等しい）などは有名な予想だ．

予想が定理に昇格した例が Poincaré's conjecture で，現在では Poincaré's theorem となった．予想転じて定理となった分かりやすい例は 4 色問題（the four color conjecture）だろう．大まかにいえば「隣り合う 2 国は異なる色で塗られる地図の作成には 4 色あれば十分」という問題で，「十分」なことが示されてから the four color theorem に昇格した．

私にとって身近であった予想は Takeuti's (Fundamental) Conjecture で，「2 階述語論理の体系においてカット除去が成り立つ」という内容だった．この予想についてはその後ある種の肯定的証

明が与えられた．

話はさらにややこしい．事実上「予想」だった命題が事情あって358年間Fermat's Last Theorem（Fermatの最終定理）と呼ばれていた．1995年に証明されてようやく看板どおりになった．

未解決の仮説や予想については現在も数学者たちが解決に向けて奮闘している．懸賞つきの問題もある．

2. 公理と公理系

公理（axiom）とは，正しくかつ有用と思われる基本的な命題で，それを使って数学で認められる方法によって他の命題を証明し定理を得るための出発点となるものだ．ある公理の集まりは，それを基にして体系的に他の数学命題を導く活動において，公理系（axiomatic system）と呼ばれる．

公理系で有名なのはユークリッド幾何の公理系だろう．その公理系からユークリッド幾何の数々の定理が証明されることは既知のとおりだ．ユークリッドの諸公理は明快に見えるが，それは点とか線を我々がイメージしているからで，この公理系は点とは何か，線とは何か，などは規定していない．点や線の代わりに抽象的な語で置き換えても幾何の定理は証明される．しかも平行線公準と呼ばれるものが他の諸公理とは独立で，非ユークリッド幾何が可能だということが19世紀に示された．素朴に「これぞ幾何学」と思われたものが新しい顔を見せるに至ったわけだ．

自然数を規定するペアノの公理系も重要だ．数学は実数の上に成り立っているといえるが，自然数を基にすれば，整数，有理数，実数，と逐次論理的に構成できる．翻って「自然数とは何か」という問いに答えるのが実はすごく難しい．答え方はいろいろあるが，できるだけ端的に自然数を規定しようという試みがペアノによる公理系だ．その公理の中には0や"次の数"の性質を述べるものがあるが，とくに自然数に限定される特徴を示すのがいわゆる数学的帰納法だ．これによって負の数や有理数，実数などが除外される．しかしこの公理系でも完全には自然数が規定されないことを一言述べておこう．

他に公理系といえる例に「群の諸公理」がある．群（group）は単位元をもち，2項演算と逆演算について閉じている数学的領域のことで，例えば整数領域について足し算とマイナスの演算とその単位元である0の性質にのみ注目したとき，それは群の公理を満たす．この公理系は，ユークリッド幾何学の公理系のように一つの数学を組み立てる材料ではなく，ペアノ公理系のように何かを規定するものでもない．それは多くの数学的領域と演算の性質の一部分の抽象化であり，一度抽象的に論じておけばその結果を多くの数学理論に適用できる，という意味で数学発展のための装置といえる．

公理系については整合性（無矛盾性），独立性，完全性，範疇性など吟味すべきことが多い．このような吟味は「数学について」語るものなので，メタ数学などと呼ばれ，それ自体がまた一つの数学理論になっている．

3. メタ表現の役割

仮説も公理系も，関連分野を熟知した数学者が深い洞察の後に「こういうことが成り立つはずだ」とか「これだけの公理系が必要（十分）だ」という見解に到達した結果なのだ．そのことへの信頼があるから，仮説は多くの数学者たちにとって数学研究の強いモチベーションになり，数学の発展の原動力になってきた．その証明または反証を求める道程において，新しい数学理論の創造や意義深い定理の証明が行われてきている．公理系は数学への新しい視点を提供し，「メタ数学」を創造した．それぞれの仮説や公理系は大きな物語を作ってきたのだ．

（やすぎ・まりこ，京都産業大学名誉教授）

物理における仮説



江沢 洋

1. 仮説と法則

一つの理論を立てようとするとき，その前提の第一は何を対象とするかということ．かつての原子論のように，これが仮説である場合もある．第二は，その対象の振る舞い，あるいは対象たちの相互の関係に関する法則ないし仮説．これらの仮説は，そこから導かれたすべての帰結が実験で確かめられると法則と見做される．

仮説の発見は，多くの場合，論理的な過程によってよりは，これを欠く推論ないしは類推によるところが大きい．極端な場合には思いつきによる．

特に，原子の世界の現象について理論を立てる際には，その現象を直接にわれわれの感覚に訴えて知ることはできないので，仮説を立て，その帰結を実験で検証するという道をとらざるを得ない．

ある適用限界をもつ仮説を，その限界が広く，その中では実験によく合うという理由で，法則と見做すこともある．その限界の外で実験と食い違うことがわかっていても，である．流体力学とか弾性論が物体の原子的な構造に目をつむって連続物体として扱うのがその例である．

ギリシア時代のDemokritosやLucretiusの原子論[1]を「厳格に見るならば，何等の自然科学的経験に基づいたものでない点で単なる独断的推察であり，本当の意味での自然科学的仮説とはいうことのできないものである」とする石原純の意見[2]には賛成できない．確かに彼らは今日いう意味での実験はしなかったが，それは時代の制約であって，彼らは自然をよく観察し考察をめぐらしたのである．寺田寅彦は「ルクレティウスの科学者魂」とまで言っている[3]．もっとも，石原も続けて「その内容においては今日の物理学上の原子論と大体の趣旨を同じくする点で極めて注目すべきものである」と言っている．

これから，原子，分子がまだ仮説だった時代から始めて量子力学の手前までを仮説に注目しながら駆け足で見て行こうと思う．Lucretiusまでさかのぼりたいのは山々だが，それは紙数が許さない．

2. 古典物理の時代

原子・分子の仮説

1815年といえば，杉田玄白の『蘭学事始』が完成し，伊能忠敬が幕命により伊豆七島に測量隊を派遣したことで知られているが，この年，W. Proutは原子量が整数に近いことに注目，すべての元素の原子はそれぞれ水素原子が寄り集まってできているという仮説を提唱した．

しかし，塩素など原子量が半端な数になる場合が見出されて，この仮説は棄てられた．

1865年，J. Loschmidtは，①気体の粘性の測定からもとめた分子の平均自由行路と②同じ物質の気体と液体の密度の比とから分子の大きさを推算した．彼は書いていないが，その計算から単位体積あたりの気体分子の数が $N_{\mathrm{L}} = 2 \times 10^{18}$ 個/cm^3 と得られる．単位体積あたりの分子数はLoschmidt数とよばれる．この数はAvogadroの仮説（1811）により気体の種類によらない．

おそらく1872年と思われるが，J.C. Maxwellは彼の気体分子運動論によってLoschmidtの計算をやり直し分子の大きさとして表1の値を得，

$$N_{\mathrm{L}} = 1.9 \times 10^{19}\ \text{個}/\mathrm{cm}^3 \quad (\text{Maxwell}) \qquad (2.1)$$

を出した[4]．Loschmidtの出した値と1桁ちがう．

電気素量

1839年，M. Faradayは電気分解の法則を提出し

表1 分子の平均自由行程 λ と直径 d (Maxwell, 1872).

	$\lambda/10^{-10}$ m (0°C, 1 気圧)	$d/10^{-10}$ m
水　素	965	5.8
酸　素	560	7.6
炭酸ガス	430	9.3

た．電気分解で 1 mol の物質を析出するのに必要な (電流) × (時間) は物質によらず一定だというのである．H. Helmholtz は，1881 年，これを (電流) × (時間)/(原子価) に修正した．この一定値は Faraday 定数 F とよばれる．

1874 年，G.J. Stoney は $e = F/N_{\rm A}$ を電気の原子 (電気素量) であると述べた．すなわち，電気量は常にこの e の整数倍であるというのだ．F の値は，このとき既に知られていたという．$N_{\rm A}$ は 1 mol の物質が含む原子の数であり，1 mol の気体は標準状態で $22.4\,l$ を占めるから，(2.1) を使えば

$$N_{\rm A} = 22.4\,l/\text{mol} \times N_{\rm L} = 4.3 \times 10^{23}\,\text{個/mol} \quad (2.2)$$

となる．これは Avogadro 数とよばれる．電気素量の今日の値は

$$e = 1.602 \times 10^{-19}\,\text{C}. \quad (2.3)$$

ついでに言えば，水素の原子量は 1 であるから，1 モルは 1 g であり，その中に $N_{\rm A}$ だけの原子があるので，水素原子 1 個あたりの質量は，(2.2) を使えば

$$m_{\rm H} = \frac{10^{-3}\,\text{kg}}{4.3 \times 10^{23}} = 2.3 \times 10^{-27}\,\text{kg} \quad (2.4)$$

となる．

J.J. Thomson, 電子を発見

1897 年，これは明治 30 年だが，J.J. Thomson が電子を発見，その質量と −（電荷）の比を測定し

$$\frac{m_{\rm e}}{e} = 1.4 \times 10^{-11}\,\text{kg/C} \quad (\text{Thomson}, 1897) \quad (2.5)$$

を得た．ここで電子は Stoney の言った電気素量（の符号を変えたもの）をもつと仮定したが，これが正しければ，電子の質量は，(2.3) を用いて

$$m_{\rm e} = \frac{m_{\rm e}}{e} \times e = 2.2 \times 10^{-30}\,\text{kg} \quad (2.6)$$

となる．これは水素原子の質量 $m_{\rm H}$ の 1/1000 だ．(今日の値は $m_{\rm e} = 9.1 \times 10^{-31}$ kg)．

彼は，電子があらゆる物質に含まれていることから，これを根源物質と考え，Prout の仮説を復活した．すべての元素の原子は電子の集まりだというのである．

しかし，電子だけでは電荷が負になってしまうので，1903 年には電子は一様に正に帯電した球の中にあって，共通の角速度で回転しているという仮説を立てた．回転しているとしたのは，電磁気学の Earnshaw の定理によって静止した荷電粒子の系は力学的に不安定なことが知られているからで，回転の角速度がある値を超えれば安定性が得られるというのだった．Thomson は水素原子でも原子は 1000 個くらいの電子をもつとした．これは，上に見たとおり水素原子の質量が電子の 1000 倍くらいということが分かっていたからである．ここで原子構造の仮説は実験と接触するようになった．

電子が回転運動をすると輻射を出す．そうすると回転が遅くなって，いずれ不安定になる．Thomson は，そうなると原子は爆発し電子を放出すると考え，これは放射能を説明するとした．これも実験との接触といえないこともない．

長岡の原子の土星模型

1903 年，長岡半太郎は，正電荷をもつ球の中を電子が動くというのは物質の不貫入性に反するとして反対し，正電荷をもつ球のまわりを電子が公転するという仮説を提出した．一つの原子がもつ電子の数が多いのも，電子が不安定になって原子からとびだすのも Thomson と同じである．

原子のもつ電子の数

1906 年，Thomson は，原子による X 線の散乱断面積が電子 1 個あたり

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\right)^2$$

(Thomson 散乱の断面積) であることを示し，また彼の原子模型によって単原子気体の屈折率や β 線の吸収を計算して，それぞれ実験値と比べ，原子のもつ電子の数は原子量の半分程度であると自説を訂正した．

1908 年には，放射能を研究していた E. Rutherford と助手の H. Geiger は α 粒子の数をかぞえ，その全電荷を測定して α の 1 個あたりの電荷が $2e$ であることを見出した．原子の構造に関する Thomson の仮説は改変を迫られてきた．α はヘリウムの原子核であることがわかった．

しかし 1910 年，J.H. Crowther は，β 線が物質を通過するときの散乱を Thomson の原子模型によって計算し実験と比べて，原子のもつ電子の数について表 2 に示す結果を得ている[5]．電子の数がかなり多いという意味で Thomson のもとの原子模型を支持しているといえなくはない．

原子の電子の数は原子量に比例し，それらの比はほぼ 3 であった．

表 2　原子のもつ電子の数.

元素	電子数	電子数/原子量
炭素	40	3.32
アルミニウム	83	3.07
銅	181	2.87
銀	320	2.96
プラチナ	605	3.12

原子の太陽系模型の仮説

1908 年に Geiger は薄い金箔にあてた α 線が，稀にではあるが，撥ね返されて戻ってくることを見出した．Rutherford は，それは原子の中心に小さいが重い荷電球があって，小さいが故に強いクーロン力を近づいた α に及ぼし，重いが故に自分は動かず α を跳ねとばすのだと考えた．その荷電球はやがて原子核とよばれるようになる．

Rutherford は H. Lamb の確率論の講義に出て勉強し，1911 年の論文で α 粒子の散乱角（入射の際の進行方向と跳ねとばされた後の進行方向のなす角）の頻度分布（散乱角が $(\theta, \theta + d\theta)$ の間に入る散乱の数を $f(\theta) \sin\theta d\theta$ として与える関数 $f(\theta)$ のこと）を計算して Geiger と学部学生 Marsden の測定と比較した．α 粒子も原子核も点電荷としクーロン力を及ぼし合うとして計算したのだが，結果は図 1 のとおりで，非常に小さいか非常に 180° に近い θ を別にすれば実験は計算によく一致している．

θ が 180° に近いというのは，α 粒子が原子核の極く近くまで近づいた場合で，原子核が大きさをもった球ならば当然クーロン力からのずれが生ずる．こう考えると，金，プラチナに対して

$$(\text{原子核の大きさ}) \lesssim 5 \times 10^{-14}\,\text{m} \qquad (2.7)$$

となるのだった．

Rutherford は，α 粒子の散乱の頻度が原子核のもつ電荷 Q の 2 乗に比例することを計算し，実測と比べて $|Q|$ がほぼ（原子量/2）e であることを見出した．それは，正でも負でもよいという．α 粒子の散乱に限れば確かにそうであるが，そのまわりを回る電子によって原子が中性になるためには，原子核の電荷は正でなければならない．

彼は，また，Thomson の原子模型でも説明された Crowther の β 線の散乱の実験が，原子核を考える彼の模型とも矛盾しないことを確かめている．

原子核のまわりを回る電子は，輻射をするから，いずれ原子核に向かって墜落するほかない．それを考えてだろうか，彼はこう言っている：

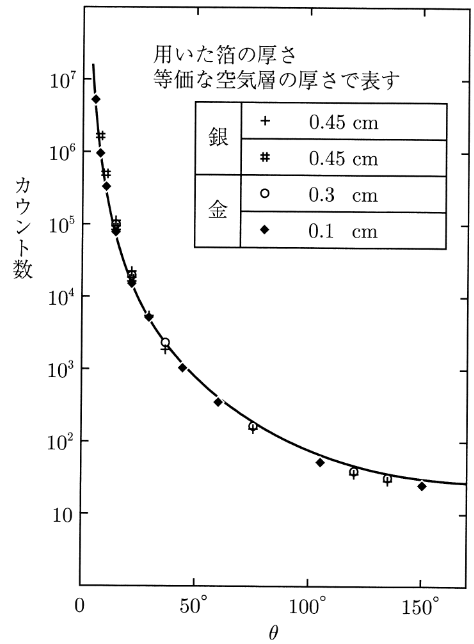


図 1　α 粒子の散乱角 θ の頻度分布．金箔と銀箔で行った実験を $\theta = 30°$ で規格化した．

長岡が，引力中心とそのまわりを円輪をなして公転する電子たちからなる土星型原子模型を数学的に扱ったことを思い出すのは興味深い．この系は引力が大きければ安定であることを彼は示した．

3. 前期量子論

19 世紀が幕を閉じようとした 1900 年も末，これは明治 33 年だが，この年の末に M. Planck が大変な発見をしていた．

Planck の量子仮説

絶対温度 T の壁で囲まれた空洞には輻射が満ちる．角振動数が $(\omega, \omega + d\omega)$ の間にある輻射のエネルギー密度 $u_T(\omega)d\omega$ の O. Lummer らの実測値は

$$u_T(\omega) = \frac{2\hbar}{\pi c^3} \frac{\omega^3}{\exp[\hbar\omega/k_B T] - 1} \qquad (3.1)$$

でよく表されることを Planck はまず指摘し，この式が成り立つためには，角振動数が ω の輻射のエネルギーが壁との間でやりとりされるのが

$$\hbar\omega \text{ を単位に，その整数倍に限られる} \qquad (3.2)$$

ことが必要だと主張した．これを Planck のエネルギー量子の仮説という．(3.1) で c は真空中の光の速さ，k_B は統計力学に登場する Boltzmann 定数，$\hbar$ は物理学に初めて登場する定数で作用量子とか Planck の定数

（の $1/2\pi$）とかよばれる．

$k_{\rm B}$ は Avogadro 数 $N_{\rm A}$ をかけると気体定数 R になることが気体分子運動論から知られている．Planck は (3.1) を実測値に合わせるためには

$$\frac{k_{\rm B}}{R} = 1.62\times10^{-24}, \quad N_{\rm A} = 6.17\times10^{23}\ 個/\mathrm{mol} \tag{3.3}$$

および

$$\hbar = 1.042\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s} \tag{3.4}$$

にとるべきだとしている．こうして Avogadro 数の値が (2.2) より一歩精密になった．

1912 年までに F. Perin が Brown 運動の観測から出した Avogadro 数[6]を平均すると $N_{\rm A} = 6.9\times10^{23}$ 個/mol となる．まったく異なる方面の実験からほぼ一致する $N_{\rm A}$ の値が得られることは原子論の正しさを示す証拠と考えられた．

Planck はエネルギー量子の仮説の物理的な根拠をもとめて大変な苦労をした．しかし，これはどうにも難問であった．たとえば，壁が輻射のエネルギー $\hbar\omega$ の半分だけ吸収したときに輻射を遮ってしまったらどうなるか？

運動の量子化の仮説

輻射を吸収したり放射したりする壁の振動子の方がトビトビのエネルギーしかとれないとしたら (3.2) は当然のことになると Planck は考えた．振動子の位置座標 $x(t)$ と運動量 $p(t)$ は

$$x(t) = A\sin\omega t,\quad p(t) = m\frac{dx(t)}{dt} = m\omega A\cos\omega t$$

のように時間変化するが，もし $p(t)dx(t)$ の 1 周期 $T = 2\pi/\omega$ にわたる積分が

$$\oint p(t)dx(t) = n\cdot 2\pi\hbar \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{3.5}$$

になるような運動のみが可能だ（運動の量子化）としたら

$$\oint p(t)dx(t) = \int_0^T m\omega^2A^2\cos^2\omega t dt = \frac{T}{2}m\omega^2A^2$$

が $n\cdot 2\pi\hbar$ に等しいこととなり

$$(運動エネルギー) = \frac{1}{2m}(m\omega A)^2\cos^2\omega t,$$

$$(位置エネルギー) = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2\omega t$$

の和，つまり振動子のエネルギーは，望み通り $\hbar\omega$ の整数倍に限られるではないか！ こうして定まるエネルギーを振動子のエネルギー準位とよぶ．

(3.5) を Planck の量子条件というが，何故こうでなければならないのか，その根拠は不明である．

対応原理

この振動子が荷電しているとすると，エネルギー準位 $E_n = n\hbar\omega$ から準位 $E_{n'} = n'\hbar\omega$ への跳び移りに伴い振動子は角振動数

$$\frac{E_n - E_{n'}}{\hbar} = (n-n')\omega$$

の光を出すことになるが，Maxwell の電磁気学によれば角振動数 ω の振動子が出す光は角振動数が同じ ω のはずだ．振動子のエネルギー $(1/2)m\omega^2A^2$ が小さく振幅 A が原子的な大きさである場合はいざ知らず，振幅が人間くらいの大きさになれば Maxwell の電磁気学が成り立ち，したがって振動子の出す光の角振動数は ω のはずである．

Bohr は，こう考えて n, n' が大きい場合には

$$n - n' = \pm1 \tag{3.6}$$

の跳び移りだけがおこると考えた（$n-n' = -1$ は振動子による光の吸収）．さらに彼は，これが n, n' の小さい場合にも成り立つとして (3.6) を選択則と名づけた．振動子は隣の準位にだけ跳び移れるというのである．

光量子仮説

A. Einstein は，1905 年，振動子ではなく輻射がエネルギー $\hbar\omega$ の粒からなるとし，この粒を光量子とよんだ．輻射がエネルギーの粒からできているのなら，その吸収，放出が $\hbar\omega$ の整数倍に限られるという (3.2) は当然のことになる．しかし，この光量子仮説も根拠不明であるし，光の波動性がどうなってしまうのかも心配である．Einstein は，波動性，たとえば光の干渉は，光量子がたくさん集まったときに現れる統計的な現象であろうとした．

N. Bohr の原子に関する仮説

N. Bohr は，水素原子の出す光が振動数のきまった線スペクトルをなすことに注目した．よく知られていたのは Balmer の公式で，光の角振動数は

$$\omega_{n2} = 2\pi cR\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (n = 3, 4, \cdots) \tag{3.7}$$

で与えられる．$R = 1.0974\times10^7\ \mathrm{m^{-1}}$ である．

Bohr は，1913 年，これを説明するために，水素原子の構造に関して次の仮説を立てた．彼は，原子の現象は Newton の力学や Maxwell の電磁気学で律することはできないと見切りをつけたのだ．

(1) Rutherford の太陽系原子の仮説に従い，水素原子は正電荷 e をもつ重い原子核のまわりを負電荷 $-e$ をもつ軽い電子が回っている．簡単のため，電子は等速円運動をするものとする．

(2)　電子の運動には一連の定常状態があって，この状態にある電子は（Maxwell の電磁気学の主張とはちがって）特別の場合しか輻射をしない．定常状態は，Newton の運動方程式には従うが，Newton 力学では運動は初期条件に応じていろいろであり得たのに対し，量子条件

$$(\text{電子の角運動量}) = n\hbar \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{3.8}$$

で制限される．定常状態の電子のエネルギーを E_n としよう．

この条件 (3.8) は Planck の (3.5) と同じことである．半径 r の円軌道に沿う運動量を p とし，これに円軌道の素片 ds をかけて一周積分し，(3.5) に従って $n \cdot 2\pi\hbar$ とおけば

$$n \cdot 2\pi\hbar = \oint pds = p \cdot 2\pi r \tag{3.9}$$

となり，これは (3.8) を与える．rp が角運動量だからである．

(3)　定常状態 E_n にある電子は，ときに別の定常状態 $E_{n'}$ に跳び移る．そのとき

$$\hbar\omega_{nn'} = E_n - E_{n'} \tag{3.10}$$

できまる角振動数 $\omega_{nn'}$ の線スペクトルの光を発する（$\omega_{nn'} < 0$ の場合には $-\omega_{nn'}$ の光を吸収する）．

この仮説から (3.7) が導かれることを示そう．

水素原子の電子が，半径 r の軌道を速さ v で回っているとすれば，運動方程式は

$$m_e \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \tag{3.11}$$

となる．角運動量は $m_e rv$ であるから，量子条件は

$$m_e rv = n\hbar \tag{3.12}$$

となる．(3.11) の両辺に r をかければ

$$m_e v^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

となり，運動エネルギーの 2 倍が $-$（位置のエネルギー）に等しいことが分かる（Virial 定理）．したがって電子のエネルギーは

$$E = -\frac{1}{2} m_e v^2. \tag{3.13}$$

また，(3.11) の両辺に r^2 をかけて (3.12) を用いれば

$$v = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar} \frac{1}{n} \tag{3.14}$$

が得られるから，(3.13) に代入すれば

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{m_e e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} \tag{3.15}$$

となる．これは (3.12) に応ずるエネルギーであるから下つき n をつけた．$n = 1$ のエネルギーが最も低い．これが，いわゆる基底状態である．

この結果を用いれば，電子が第 n 定常状態から第 2 定常状態に跳び移るとき出す光の角振動数は (3.10) により

$$\omega_{n2} = \frac{E_n - E_2}{\hbar} = \frac{1}{2} \frac{m_e e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 \hbar^3} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

となる．これは

$$R = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right)^2 \frac{m_e e^4}{c\hbar^3} \tag{3.16}$$

であれば (3.7) に見事に一致する．

(3.16) が成り立つかどうかを見よう．Bohr が用いたのは

$$e = 4.7 \times 10^{-10}\,\text{c.g.s.e.s.u.} = 1.57 \times 10^{-19}\,\text{C},$$
$$\frac{e}{m} = 5.31 \times 10^{17}\,\text{c.g.s.e.s.u./g} = 1.77 \times 10^{11}\,\text{C/kg},$$
$$\hbar = \frac{6.5 \times 10^{-27}}{2\pi}\,\text{erg} \cdot \text{s} = 1.04 \times 10^{-34}\,\text{J} \cdot \text{s}$$

であったから $m_e = 8.9 \times 10^{-31}$ kg で，(3.16) から

$$R = 1.03 \times 10^7\,\text{m}^{-1}$$

となる．(3.7) の下に書いた値との一致はまあよい．

この一連のスペクトル線 (3.7) は Balmer 系列とよばれる．もっと一般に状態 n から n' への電子の跳び移りにともなうスペクトル線 (3.10) も次々に発見された．

この Bohr 理論の受けは，必ずしもよくなかった．von Laue と O. Stern は「もし，この理論が正しかったら物理を止める」と言ったとか[7]．Rutherford は (3.10) について鋭い質問をした．「電子は定常状態 n を離れるときどの n' に行くか, 如何にして知るのか？」要するに因果律の問題である．同じ問題が東大の物理教室でも議論されたというから面白い．長岡が Bohr 理論を紹介したとき寺田寅彦が言った．「電子が次の軌道に行くとき角振動数 ω の光を出し，それを飛び越えて次の次の軌道に行くときは ω' の光を出すとすると，何だか電子が自分の行き先を知っていて，それに相当する角振動数の光を出すような気がしますがね」[8]．これに反して，A. Sommerfeld は Bohr に好意的な手紙を寄せた．

対応原理

水素原子の電子がエネルギー準位 E_n から $E_{n'}$ に跳び移るとき出す光の角振動数は

$$\omega_{n,n'} = \frac{E_n - E_{n'}}{\hbar} = \frac{1}{2} \frac{m_e e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 \hbar^3} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \tag{3.17}$$

であるが，原子が人間の大きさくらいに大きくなった

場合 ($n, n' \gg 1$) には，そこは Maxwell の電磁気学の世界だから，原子が出す光の角振動数は電子の運動の角振動数

$$\omega_n = 2\pi\left(\frac{2\pi r_n}{v_n}\right)^{-1} = \frac{v_b}{r_n}$$

に等しいはずである．(3.14) と (3.12) から

$$v_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\frac{1}{n}, \quad r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}n^2 \qquad (3.18)$$

となるから，軌道運動の角振動数は

$$\omega_n = \frac{1}{(4\pi\varepsilon)^2}\frac{m_e e^4}{\hbar^2}\frac{1}{n^3} \qquad (3.19)$$

である．他方，$n \to (n-1)$ の跳び移りを考えると，$n \gg 1$ では，そのとき出る光の角振動数 (3.17) において

$$\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \sim \frac{2}{n^3}$$

となるから $\omega_{n,n-1}$ は確かに (3.19) に等しい！ こうして，原子の大きさの世界では原子の出す光のスペクトルは量子条件 (3.12) や光子のエネルギーの大きさ $\hbar\omega$ で制限され，電子の運動の角振動数とは異なるが，そうして計算される光の角振動数は人間の大きさの世界では Maxwell の電磁気学が予言する角振動数に漸近する．原子の世界の法則は人間世界の法則につながっていたのである．

$n - n' \neq 1$ の場合に出る光は，Maxwell の電磁気学でいう高調波に対応するのであるが，そこまでは，いま立ち入らない．

なお，(3.18) から Bohr の $e, m_e, \hbar$ の値を用いて，水素原子の半径

$$r_n = (5.5 \times 10^{-11}\,\mathrm{m})n^2 \qquad (3.20)$$

が得られる．表 2 の水素分子の直径と比べてみよう．$n = 1$ として，水素分子の大きさを見当つけるため 2 倍し，直径にするためさらに 2 倍すれば $d = 2.2 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}1$ となり表 2 の値とだいたい合う．

相対論的な扱い

水素原子の線スペクトルは，1 本のように見えていたものが，よくみると近接した何本かの線からなることが見いだされ，Bohr 理論では理解できないとして大問題になった．これをスペクトルの微細構造という．現代に跳んで恐縮だが，理科年表を見ると H_α とよばれる線が波長にして

$$\left.\begin{matrix} 656.285 \\ 656.273 \end{matrix}\right\} \times 10^{-9}\,\mathrm{m}$$

の 2 本からなる．角振動数にすれば

$$\left.\begin{matrix} 2.87017 \\ 2.87023 \end{matrix}\right\} \times 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1} \qquad (3.21)$$

となり，電子の $n = 3 \to n = 2$ の跳び移りに対する (3.7) からの計算値

$$\omega_{32} = 2\pi c R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = 2.8710 \times 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$$

とほとんど一致する．Bohr 理論は近似としては悪くないのである．しかし微細構造は説明できない．

A. Sommerfeld はスペクトルの微細構造を理解するために，1916 年，核をまわる電子の運動を相対論的に扱った．しかも電子の軌道を円に限らないことにしたので，量子化条件は (3.8) では足りなくなった．そこで Sommmerfeld は Planck と Bohr の条件 (3.5), (3.9) を拡張して，電子の運動の 3 つの自由度のそれぞれに対応する座標 q_k と運動量 p_k に対して

$$\oint p_k(t)dq_k(t) = n \cdot 2\pi\hbar \quad (k = 1, 2, 3) \qquad (3.22)$$

を要求することにした．これは新しい仮説である．実際，当時，量子条件の 3 次元運動への拡張は，日本の石原純をはじめいろいろと提案されていた．

相対性理論を用いた計算をここで説明することはできない．計算の結果をいえば水素原子の電子のエネルギーは，2 つの整数 $n \geq k$ で定まり

$$E_{nk} = -2\pi c R\left[\frac{Z^2}{n^2} + \frac{\alpha^2 Z^2}{n^3}\left(\frac{1}{k} - \frac{3}{4n}\right)\right] + O(\alpha^4) \qquad (3.23)$$

で与えられる．ここに

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137.036} \qquad (3.24)$$

は微細構造定数とよばれる無次元の定数である．これは小さいので相対論の効果は小さく，電子のエネルギーは主として Bohr 理論で与えられる．

(3.21) のスペクトル線は $n = 3 \to n' = 2$ という電子の跳び移りによって出るとみられるのだった．$n = 3$ の準位の k による分裂は (3.23) の因子 $1/n^3$ のために小さいから，分裂は $n' = 2$ の準位だけとしよう．すると (3.21) の角振動数の差は

$$(n = 3,\, k) \longrightarrow \left\{\begin{matrix} (n' = 2,\, k' = 1) \\ (n' = 2,\, k' = 2) \end{matrix}\right.$$

という電子の 2 つの跳び移りによって生ずると考えられる．そのとき出る光の角振動数は

$$\frac{E_{3k} - E_{21}}{\hbar} \quad と \quad \frac{E_{3k} - E_{22}}{\hbar}$$

であって，その差は

$$\Delta\omega = \frac{E_{22} - E_{21}}{\hbar} = \frac{2\pi\alpha^2 c R}{2^3}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

となる．これは 7×10^{10} となり確かに (3.21) の差

$$(\Delta\omega)_{\mathrm{obs}} = 6 \times 10^{10}\,\mathrm{s}^{-1}$$

に一致する．

Sommerfeld の理論によって水素原子の電子のエネルギー準位は大幅に増えたので，どの準位からどの準位への跳び移りはおこるか，あるいはおこらないかをきめる選択則が求められることになった，Bohr の対応原理の出番であるが，いまは立ち入らないでおこう．

4. 量子力学へ

こうして原子の世界の法則性がちらほらと明るみに出たが，その場かぎりの仮説が多く，なんといっても統一的な原理の欠如は否めなかった．統一原理への渇望をみたすものとして Heisenberg の仮説が 1925 年に，Schrödinger の仮説が 1926 年に提出され，実験の進展とあいまって原子世界の理論体系として急成長する，その叙述をする紙数はなくなった．ここでは，Planck, Bohr, Sommerfeld の量子条件 (3.5), (3.9), (3.22) が量子力学の基本原理の一つ（正準交換関係）に進化したことを記すだけにする．

5. 自然は教育的である

これまで前期量子論の仮説の発展を追ってきて，つくづく自然は教育的であると思う．Thomson の原子模型は，かなり見当はずれなものであったが，自然はそれを提示した人を見放さなかった．Thomson の仮説から計算した原子の大きさは気体分子運動論から推定された大きさと同じオーダーだった．

Rutherford と Geiger–Marsden の実験がクーロン力の逆 2 乗法則に Newton 力学を適用して計算した結果にピタリと一致したこと（図 1）は，続く原子模型の発展に大きな力になったが，もともと原子世界の散乱現象だから，Newton 力学でなく量子力学で計算しなければならなかったのだ．ところが，逆 2 乗法則に従う力の場合には，その場合に限って，散乱の角分布 $f(\theta)$ は Newton 力学で計算しても量子力学で計算したのと同じ結果になる．原子の世界から次に原子核の世界に進むと，もはやその幸運はない．自然は，まず Newton 力学でも正しい答が出る場合を提示して，人に量子力学を発見させ，それからおもむろに量子力学で解かねばならない問題を出した．

同じことは，Bohr の原子模型についても言える．Sommerfeld の水素原子の相対論的な理論も，エネルギー準位に関する限り後の P.A.M. Dirac の相対論的量子力学による計算の結果と一致するのだった．これらの一致がなかったら，われわれの先輩たちは前期量子論で躓いたことだろう．

6. 物理学は仮説か？

ある人が言った．物理学は仮説の山だ．新しい実験が出ると，それに合わせて仮説を取り換える．こんな物理学は信用できないと言わんばかりであった．

確かに，あるときまで実験にあっていた仮説 A が新しい実験に矛盾したら，その仮説は仮説 B と取り換える．しかし，仮説 A は棄ててしまうのではない．新しい実験の矛盾することが見いだされたのは，仮説 A の適用限界が明らかになったことである．その限界の内側では新しい仮説 B は古い仮説 A と同じく現象を説明しなくてはならない．今回の解説では，この点をゆっくり解き明かす余裕がもてなかったが，読者は古い仮説と新しい仮説の関係をゆっくり検討していただきたい．たとえば，β 線の散乱について Rutherford は彼の原子模型によっても Thomson の模型による計算と同じ答えになることを述べている．

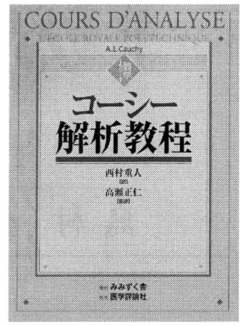
相対性理論の場合が教訓的だ．特殊相対性理論は光速 c に比べて小さい速度の物体に適用すると Newton 力学に戻る．その意味で特殊相対性理論が発見された後でも Newton 力学は棄てられない．量子力学でも $\hbar$ に比べて作用量の大きな世界に適用すれば Newton 力学に戻ると期待されるが，事情は特殊相対性理論の場合ほど単純ではない[9]．対応原理のところで述べたことは，その一つの側面である．

参考文献

1) Lucreties「事物の本性について」岩田義一訳，所収『ウェルギリウス・ルクレティウス』，世界古典文学全集 21，筑摩書房 (1965).
2) 石原純『自然科学概論』，岩波書店 (1929), p.277.
3) 寺田寅彦『全集・第 5 巻』，岩波書店 (1997), p.145.
4) W.D. Niven ed., *The Scientific Papers of J.C. Maxwell*, vol.2, p.343.
5) J.A. Crowther, *Proc. Roy. Soc. A* **84** (1910) 226; 物理学史研究刊行会編『原子模型』物理学古典論文選書 9，東海大学出版会 (1970), p.69.
6) 江沢洋『だれが原子をみたか』，岩波書店 (1976), p.291.
7) A. Pais, *Inward Bound*, Oxford (1986), p.208.
8) 中谷宇吉郎『寺田寅彦の追想』，甲文社 (1947), pp.208–9.
9) D. Giulini *et al.*, *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory*, Springer (1996).

（えざわ・ひろし，学習院大学名誉教授）

コーシー 解析教程



西村重人訳，高瀬正仁監訳，A5 判，456 頁，本体 6600 円，みみずく舎

19 世紀初頭のコーシーの『解析教程』は微分積分学の教科書の古典であり，数学教師にとって必見の書である．このたび，その第一部『代数解析』が翻訳されたことは喜ばしい限りであり，訳者たちのご尽力に深い敬意を表する．

18 世紀の数学は，オイラーたちが輝かしい成果を挙げた天才の世紀であった．しかし，世紀末には，天才たちの直観的でおおらかな数学を発展させようとすると，いたるところで綻びが生じ，後継者たちの間には悲観論が蔓延したという．無限小，収束，連続その他の基礎概念を根底から見直す必要に迫られていた．

一方，19 世紀は，産業革命の進行とも相俟って，微分積分が諸科学や工学の基礎として広く活用され始めた世紀である．「弾道学」などということばは現在では耳にすることさえ稀であるが，ナポレオン軍が強かったのは，エコール・ポリテクニーク（理工科大学校，本訳書では，工芸大学校）を創設し，いち早く最新の数学や科学の成果を修得させたからだといわれる．そこでは微分積分の講義が開講され，ナポレオン追放後の王政復古時代に講義を担当したのがコーシーであった．そのためのノートが『解析教程』である．

コーシーと言えば，ε–δ 論法などに苦闘した経験をお持ちの読者も多いことと思う．「世紀末」的な状況を打破すべく，基礎概念を再検討し，微分積分のシラバスを作り，17 世紀のニュートン，ライプニッツ以来の微分積分法から微分積分学への転換点を記したのがコーシーであった．微分積分学は 19 世紀中葉のリーマンやワイエルシュトラスの時代にほぼ確立される．その後の微分積分は，一歩一歩の積み重ねさえ厭わなければ，天才でなくとも習得できるものとなる．

今回訳出された『代数解析』は，当初三部作として企画された『解析教程』の第一部であったが，1821 年の発刊当時，大部過ぎて使えないと不評であったという．実際，関数の概念に始まり，数列や級数の収束・発散から，当時の代数解析（ベキ級数展開やオイラーの公式，多項式の対称性の利用法等々）まで，「ゆとり教育」以後の大学教養教育では通年講義ではカバー仕切れない大著である．

なお，第二部以後の代わりに出版されたのが『無限小解析要論』であった（小堀憲訳・解説『コーシー微分積分学要論』，『現代数学の系譜』第 1 巻 共立出版，1969）．余談ながら，この『系譜』は『物理学古典論文叢書』（東海大学出版会）などと刊行時期がほぼ重なっていた．第 2 次世界大戦後の日本における近代化に関する反省と議論の最後の頃，高度成長期の中で，「神話」を排除して原典に立ち返り，現代科学とは何かを真摯に問い直す動きが確かにあったように思う．

本書には，「神々の愛でし」数学者アーベルがフーリエ級数（フーリエの『熱の解析的理論』の出版は翌年 1822 年）を用いて反例を提示したことでも有名な「定理」なども含まれる．現代の学生たちもよくやるような “チョンボ” を大数学者コーシーが犯していたことは，新たな基礎概念の獲得に至るまでの数学史上のエピソードとして，微笑ましくも興味深い．

コーシー以後，『解析教程』は数学の文化的伝統の一つとなり，高名な数学者たちが競うようにそれぞれに “Cours d'analyse” を著している．19 世紀のグルサー，20 世紀後半の L. シュワルツなどは現在でも比較的よく読まれており，また，高木貞治の『解析概論』もスミルノフの『高等数学教程』もそのような文化の流れを汲むものといってもよいであろう．

最後に，訳者たちは，本書が歴史的文献であることを意識してかなり腐心されたように見受け，そのご苦労にも敬意を表する．他方，故杉浦光夫氏らの「現代数学史」（歴史学としての数学史ではなく，現代人のための数学史）という視点を思い出す．

18 世紀のオイラーの公式の美しさに魅せられた読者が，19 世紀のコーシーを辿りつつ，その先に開ける数学の世界を垣間見て，さらなる深さと美しさ，そして豊かさに巡り合うことを祈りたい．

高 橋　陽 一 郎（東京大学生産技術研究所／東京大学・京都大学名誉教授）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

島村　勲

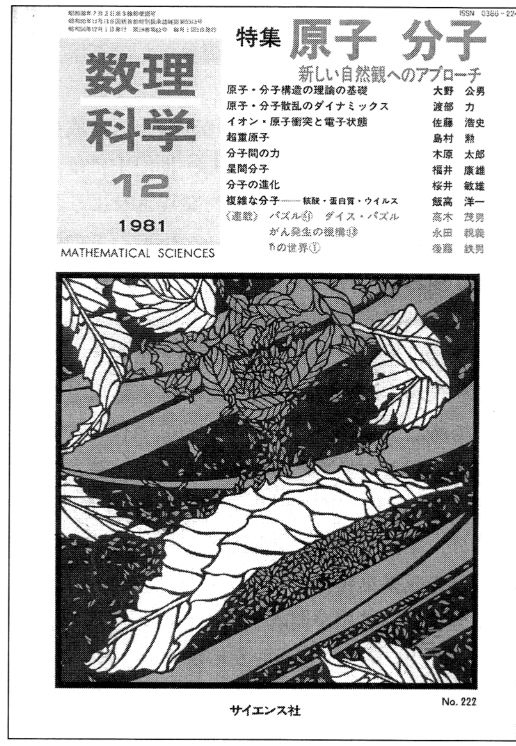
1981年12月号

量子力学の構築とその検証，新概念の理解の過程で原子分子（「原子や分子」の意）分光学や原子分子理論は物理学の最前線を担っていた．事実，当時のノーベル賞の多くが量子論・原子分子関連分野を対象とした．

その後，物理学は多様な発展を遂げ，約半世紀後，本特集号「原子 分子」が出る頃には，この分野は実験，理論とも地道だが着実な進歩を見せていた．シュレーディンガー方程式の解という理論的側面から言えば，極端に遠方まで到達するクーロン力を及ぼし合う比較的少数個の粒子集団である原子系や分子系につき，(i) 低いエネルギーをもち空間的に狭い領域に閉じ込められた安定な束縛状態，(ii) 広い運動領域をもち，密なエネルギー間隔で無限個並ぶ弱い束縛状態（リュードベリ状態），(iii) 無限に広い空間を動き，連続的なエネルギーをもつ非束縛状態（連続状態），それに (iv) 連続状態と束縛状態の両面の性質を合わせもち，束縛状態の顔をしながらある寿命で崩壊してしまう準束縛状態（共鳴状態）を確実に解いて原子系，分子系の物理的全体像を掴むべく努力が続けられた．相対論効果や量子電気力学（QED）効果も詳細に調べられた．

連続状態波動関数は原子や分子，そのイオン間の衝突やそれらと光子その他の粒子との衝突，反応過程を量子論的に記述する．準束縛状態はこれらの過程を決定的に左右する．実験装置内や地上の自然界，上層大気，惑星大気，宇宙空間にまでわたりあらゆる所に存在する原子や分子が関わる現実の多様な物理現象を理解するという応用上の目的と，核反応論や化学反応論とも周辺が重なる理論の枠組みをフルに展開した原子分子物理学自体の解明の両面から研究が進められた．

30年後の現在，多重同時計測等の原子分子衝突実験技術の発展，放射光施設，粒子加速器・蓄積リング，原子分子物理研究に適した陽電子や反陽子，ミュオンなどのエキゾチックビーム等々の格段の進歩に加え，自由電子レーザーを含め，超高強度または超短時間スケールのレーザー技術の画期的進展により，各種の新たな実験事実が明らかになりつつある．今後ますます興味ある結果が次々と生まれるであろうことは間違いない．原子分子物理学を取り巻く状況は一変したと言えよう．中でも光子場と孤立原子分子，衝突しつつある原子分子，あるいは原子分子集団との相互作用の研究は今や「原子・分子・光物理」（Atomic, Molecular and Optical Physics, AMO 物理）という新分野名を米国，次いでヨーロッパで定着させている．実験研究に呼応して関連理論研究も30年前に比べはるかに多様化，かつ大幅に進展しつつある．コンピュータ技術と理論手法・計算技術の大いなる発展がこれをサポートしている．今後の多方面への展開から眼が離せない．



（しまむら・いさお，理化学研究所）

チューリング

チューリング機械

野 崎　昭 弘

アラン・マチソン・チューリング（Alan Mathison Turing）は，1912年にロンドンで生まれ，ケンブリッジ大学で数学を専攻した後，1936年から38年までアメリカのプリンストン大学の大学院に進学，ここで博士号を取得した．その後ケンブリッジ大学に戻ったが，翌年に始まった第二次世界大戦のために，ドイツ軍の暗号の解読にかかわり，暗号解読専用の大型真空管計算機コロッサスの設計・運用にも携わった．その後人工知能の性能判定（文献3)参照）や生物の形態形成（文献4)参照）について，おもしろい論文を書いたが，当時は犯罪とされていた同性愛で告訴され，有罪判決を受け，1954年に服毒自殺した．ただしお母さん（サラ・チューリング）による伝記には「事故死または他殺」と書かれているという[2]．アメリカのコンピュータ学会ACMでは彼の業績を記念して，1966年からチューリング賞が創設されたが，錚々たる研究者が受賞していて，情報科学界の最高の賞とみなされている．ここでは編集部の要望に応えて，コンピュータ科学の基礎となった彼の「チューリング機械」について，概要を解説してみたい．

1. チューリング機械とは

これは1936年に発表された彼の有名な論文「計算可能な数について，決定問題への応用つき」[1]の中で提示された「実数の桁数字を，有限的な手段で次々と計算するための計算モデル」である．そこでチューリングは「天才の直観とか，経験的なカン等を必要としない，客観的・有限的な方法」で，数を計算するとはどういうことか，を考察した．当然，それが明示されれば「誰でもそれを実行できる」はずで，機械でも実行できるものでなければならない，と考えたのが，まず最初のひらめきである．一連の計算を自動的に処理する機械は，バベジ（1792–1871）のアイデアはあったが，まだ実現されていなかった（最初の実用的なリレー計算機，ツーゼのZ3が1941年）．だから彼のアイデアが，現代のコンピュータの「思想的先駆け」と言われるのももっともなことである．

人間は何かの計算をするとき，頭の中にある計算手順や，マニュアルに従って計算を進める．計算の途中では，ノートに途中結果や部分的な結果を記録しながら，計算を進め，最終結果もノートに書きこむ．それを彼は図1のようにモデル化した（なお用語は現代の慣習に合わせ，わかりやすいように「(読み書き) ヘッド」を補って描いた）．

本体は，人間なら脳に相当する部分で，人間が記憶している手順は，すべてここに組み込まれているとしてよい（マニュアルは本体に組み込んでもよいし，テープに書くこともできる）．そのほか

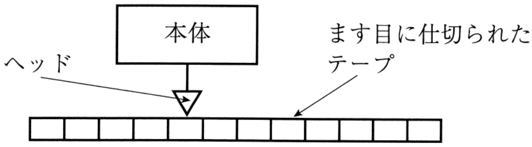


図1　チューリング機械の構成．

一定容量の（内部）記憶装置があって，計算の途中経過の重要な一部分を記録することができる．だから本体は，いくつか異なる内部状態を取ることができる．

テープは「ノート」の代わりで，ふつう2次元的なノートを1次元のテープにおきかえ，しかも「ます目」に仕切られている，とする．どのます目にも1つの記号を書き込むことができ，あとで参照したり書き変えたりすることができる．なお使える記号の種類は有限個で，あらかじめ決められている．

テープはヘッドを通して本体につながっている．ヘッドは，テープのどこかのます目の上にあって，そのます目の中の記号を読みとって本体に送ったり，逆に本体からの指示に従って，そのます目の記号を書きかえることができる．このヘッドはテープ上を，1回に1ます分だけ右または左に動かすことができる（テープを左右に動かせる，と考えてもよい）．テープは必要に応じて右にも左にも「いくらでも追加・延長できる」が，追加されるます目には「何も書かれていない」（空白記号 □ が書かれている）と仮定する．

このテープは外部記憶装置・兼・入出力装置で，途中経過や部分的な結果，最終結果の記録に使われるほか，人間から機械に伝えたい情報もテープ上に書いておけばよい．

チューリング機械は，本体の内部状態 s と，ヘッドから読み取られた（ヘッドの真下のます目にある）記号 x とに応じて，次のような動作をする．

①そのます目に，記号 y を書く．ただし $y = x$ でも $y = \square$（消去）でもよい．

②ヘッドの位置を，右または左に1ます分移動するか，あるいは動かさない．

③本体の内部状態 s を s' に変える（$s' = s$ でもよい）．

どの場合にどうするかは，表1のような「動作規則表」によって，ただ一通り確定する．

1つのチューリング機械Mは，このような動作規則表によって決まる．そして1つの動作規則表は，適当な方法（符号化）によって，0と1の列で表すことができるから，1つの2進数 N とみることができる．その数 N を，チューリング機械Mの**表示数**という．なお表示数からもとの動作規則表を復元することは，機械的にできる．

さて，表1の機械Mに空白テープ（すべてのます目に空白記号 □ が書かれたテープ）をかけて，初期状態 s_0 からスタートさせると，次のような動作をするはずである．

$$s_0\square\square\square\square \to 0s_1\square\square\square \to 01s_1\square\square$$
$$\to 011s_1\square \to \cdots$$

ここで例えば記号列 “$01s_1\square\square$” は，

本体の状態は s_1 で，テープ “$01\square\square$” の，
左から3番目のます目の上にヘッドがある

ことを表している．これはある時点でのチューリング機械の（テープ上の記号列とヘッドの位置を含めた）状況を表しているので，**時点表示**と呼ばれる．なお左右に（潜在的に）無制限に続く □ を省けば，時点表示はいつでも有限の記号列で表せる．

ところで上の例ではテープ上の記号列は，数字0, 1だけに注目すると

$$（なし）\to 0 \to 01 \to 011 \to 0111 \to \cdots$$

のように，最初の0のあと，1が無限に伸びてゆく．このような場合，

この機械は，実数 $0.011111\cdots$（以下1が無限に続く）を**計算する**

という．ある実数 α が**計算可能**であるとは，適当なチューリング機械Mに空白テープをかけてスタートさせると，α の（整数部分を無視した）小数点以下の2進桁数字（0, 1の無限列）がテープ上に次々と現れることである（彼はさらに技術的な，細かい条件を課しているが，本質的ではないので，ここでは立ち入らない）．チューリングは「ある実数を計算する機械」の表示数のことを，**満足**

表1　あるチューリング機械Mの動作規則表（例）.

内部状態	読んだ記号	新しい記号	ヘッドの移動方向	次の内部状態
s_0	□（空白）	0	右	s_1
s_0	0	0	右	s_1
s_0	1	□	不動	s_0
s_1	□	1	右	s_1
s_1	0	0	左	s_0

〈注意〉この表にない状況が発生したとき，例えば「状態 s_1 で読んだ記号が1」のときは，機械は**停止**する．Mが動作を始める“初期状態”は，特に指定がなければ s_0 とする．
〈補足〉このような動作規則表を書くことは，現代のコンピュータで「プログラムを書く」こととよく似ている．だからチューリングは（部分・動作規則表の略記法を導入していることから）「パラメータつきのサブルーチン」の概念を導入した，とも言われている．

すべき（satisfactory）数と呼んでいる．
〈注意1〉無限個の0, 1を書かない，「有限ステップで止まってしまう」機械や「無限に動き続けるが0, 1を有限個しか書かない」機械は，実数を計算しないとみなされる．
〈注意2〉表示数は可算無限個であるから，計算可能な実数も可算無限個である．

2. 万能チューリング機械の存在

情報理論で有名な，センスのいい数学者C.シャノンは，次の事実を指摘した．

事実1　どんなチューリング機械Aの動作でも，テープ記号が2種類（例えば0, 1だけ）しかないチューリング機械Bで，シミュレーションできる．

Aが使える記号の種類は有限個であるから，いくら多いとしても，一定個数の0, 1の組，例えば8個の0, 1で符号化できる．そこでAのテープの1つのます目をBのテープの8つのます目におきかえ，Bは「8個のます目を読んでもとのAの記号を知り，それに応じてAの新しい記号を同じ8個のます目に書きこむ」ようにすれば，Aと実質的に同じ動作を再現できる．BはAより状態数がふえるし，Aの1ステップの動作を，たくさんのステップで実現することになるが，ともかく「できる」ことは確かである．

さらにシャノンは，これほど簡単には説明できないが，次の不思議な事実を証明した．

事実2　どんなチューリング機械Aの動作も，内部状態が2つしかないチューリング機械Bでシミュレーションできる．ただしBはAよりずっと多くの記号を必要とする．

もっと不思議なのは，チューリングが示した次の事実である．

事実3　ある特定のチューリング機械Uによって，任意のチューリング機械Mの動作を，任意の時点表示からシミュレーションできる．

そのようなチューリング機械Uは，**万能チューリング機械**と呼ばれる．どのようにシミュレーションをするのか，というと，指定された機械Mの動作規則表 α と，時点表示 β を並べて書いたテープ (α, β) を機械Uに与えるのである．Uは α をマニュアルとして繰り返し参照しながら，Mの時点表示 β から次の時点表示 γ を作り，さらに γ から次の時点表示 δ，そのまた次の時点表示，…を次々と作り出すことができる．それを見ればMの β 以降の動作が，完全にわかるわけである．
〈注意〉現在は時点表示 β を $\gamma, \delta, \cdots$ と**書きかえてゆく**のがふつうであるが，チューリングは β を消さず，その隣に $\gamma, \delta, \cdots$ を**書きならべる**機械Uを示している．

3. 決定問題への応用

ところで「ある条件が成り立つかどうか」，イエスかノーかを問う問題を，ヒルベルトは**決定問題**（decision problem，ドイツ語では Entscheidungsproblem）と名付けた．有名な例が，彼が1900年の講演で列挙した23個の問題の第10番目である．基礎的な用語から説明すると，整数係数の多項式を0とおいた方程式を**不定方程式**という．例えば

$$15x + 35y + 21z - 293 = 0$$

は1次の不定方程式で，

$$(x^2+1)^3 + (y^2+1)^3 - (z^2+1)^3 = 0$$

は6次の不定方程式である．前者は整数解があり（ヒント：$z = 3$），後者は整数解がない．

> **ヒルベルトの第10問題**：任意の不定方程式が，整数解をもつかどうかを判定する有限的・一般的な方法は，存在するか？

これは1970年に，ロシアの数学者マチャセビッチによって否定的に解決されたが，当時は真偽不明であった．それどころか，ヒルベルトの「決定問題」自身が，数学的には明確に**定式化されていなかった**のである．

1次の不定方程式であれば，整数解が存在するかどうかを，一般的に判定できる．そのことは，具体的な判定法（互除法）を説明すれば，十分な説得力を持つので，「有限的な方法」の厳密な定義など，なくても困らない．しかし「有限的な方法が存在**しない**」ことを示すには，「こうやってもダメでした」では説得力がないので，まず「有限的な方法」の枠組みをきちんと定義して，「どうやってもダメだ」ということを証明しなければならない．

「有限的な方法」の定式化は，限られた分野ではすでに与えられていた．方程式の代数的解法が古典的な例であるが，証明を「記号論理式の変形操作」として表現する形式的な体系はすでにあって，その上に立ってK. ゲーデルは「ある命題もその否定も，どちらも証明できない（真・偽を判定できない）」場合がある，という**不完全性定理**を証明した（1931）．また数の計算については，一般的な体系をA. チャーチが定式化し，その上でやはり「解けない決定問題がある」ことを示していた（1936）．

これらの体系に比べてチューリングの理論には，次のような特色がある．

(1) 記号列を直接自由に扱えるので，論理式や数式に限らず，任意の情報処理の手順・方法を記述することができる．

(2) モデルの一般性は，よく考えれば「直観的にも明らか」な上，ゲーデルが用いた証明論の体系やチャーチの体系で許される操作は，すべてチューリング機械で実行できることが確かめられた．

そのためチャーチは，

有限的な方法（**アルゴリズム**）で解けるとは，チューリング機械で解けることだと認めよう，

と提唱し（**チャーチの提唱**），今は広く受け入れられている．これで決定問題の定式化も，チューリングによって与えられたことになる．しかしあとから現れた若者のモデルの優秀さを認めて，「勝ちを譲った」チャーチも立派だ，と私は思う．

ところで自然数hには，あるチューリング機械Mの表示数で，しかも「その機械Mが，ある実数を計算する」満足すべき数と，そうでない数とがある．これを利用して，次のような実数$t = 0.d_1d_2d_3d_4\cdots$を定義することができる：

番号hが「1つの実数を計算するあるチューリング機械Mの表示数で，Mが計算するh桁目の数字が0」であれば$d_h = 1$，それ以外の場合は$d_h = 0$

この数tは，「定義はできるが，**計算可能ではない**」実数の具体例になっている．実際，tがあるチューリング機械Mで計算できたとして，Mの表示数をhとすると，Mが計算する数とtとは，h桁目が必ず異なるからである（**対角線論法！**）．

次に，条件

(#) 自然数hが，満足すべき数であるか，否か

を，いつでも有限ステップで判定するチューリング機械Qが存在すると仮定してみよう．すると次のような手順で，上記の数 t の桁数字 d_h を計算することができる．

(1) $h=1$ とおく．
(2) h が満足すべき数であるかどうかを，機械Qに判定させる．
(3) (2) の答えがイエスならステップ(4)に進み，答えがノーなら $d_h=0$ をテープに書き，h の値を1増やして，(2) に戻る．
(4) h は「ある数（の無限の桁数字）を計算する」機械Mの表示数であるから，h が表す（Mの）動作規則表 α と，Mの最初の時点表示 β（左端は初期状態，あとは空白テープ）を万能チューリング機械Uに与えて，第 h 桁の桁数字 d までを計算させ，$d_h=1-d$ だけをテープに書きこむ（関係ない0, 1は別の記号 $0'$, $1'$ におきかえればよい）．それから h の値を1増やして，(2) に戻る．

慣れてないとわかりにくいことであるが，機械Q, Uを含む大きなチューリング機械Wを上手に作ると，機械Wはこの手順(1), (2), (3)を無制限に繰り返し実行して，$d_h=0,1$ を次々とテープに書きこみ，実数 t を計算してくれる．しかしそれは，今言ったばかりの「t はチューリング機械では計算できない」ということと矛盾する！

矛盾の原因は，最初に「条件(#)を，いつでも有限ステップで判定するチューリング機械Qが存在する」というと仮定したところにある．したがってその仮定は誤りで，条件

> (#)を判定する，一般的・有限的な方法は**存在しない**.

〈補足〉多くの本に（日・米のウィキペディアでも），「チューリングはいわゆる“停止問題”によって，解けない決定問題があることを示した」と書かれている．しかしひさしぶりに原論文を読んで驚いたことには，チューリングは「機械Mにテープ α を与えたとき，有限ステップで停止するか」という**停止問題には全く触れていない**．実際に扱われているのは，上に紹介した「h が満足すべき数であるか」の判定問題（とその変種）で，停止問題とはかなり違う．停止問題を定式化したのはどうもM. デービスらしいのだが，それがチューリングに帰せられた経過は，確認できなかった．

4. チューリングの現代的評価

昔はコンピュータ関係の専門学科では，必ずチューリング機械の理論を教えていた．しかし現代ではすべてのパソコンが，「必要に応じていくらでも，外部メモリを増設できる」と仮定すれば万能チューリング機械なので，プログラミング言語を何か身につければ，チューリング機械のような古典的なモデルを習う必要はなくなった（計算量理論でも「基本ステップ」を適当に定義すれば，チューリング機械は使わなくて済む）．しかしチャーチの提唱，現代風に言えば

> ある問題を解くアルゴリズムがあるとは，その問題を解くコンピュータ・プログラムが書けることである

は，今でも重要であろう．また万能なコンピュータでも，メモリーや時間の制限のために解けない問題があることだけでなく，メモリー・時間が無制限でも「**解けない問題がある**」ことも知っておくとよい．そういう認識の根底にチューリングの仕事があることを，情報処理の関係者は忘れてはいけない．

参考文献

1) A.M. Turing, “On Computable Numbers, With An Application To The Entscheidungsproblem”, *Proc. London Math. Soc.*, **2–42**, pp.230–265 (1936).
2) サラ・チューリング『アラン・チューリング伝』渡辺茂・丹羽富士雄訳，講談社 (1969).
3) D・ホフスタッター『ゲーデル，エッシャー，バッハ』野崎昭弘・林一・柳瀬尚紀訳，白揚社，第18章（原著1979）.
4) 秋山豊子・佐々木誠・竹中淑子「動物の体色発現と紋様形成の仕組みI」, *Hiyoshi Review of Natural Science, Keio University*, No.**37**, pp.73–94 (2005).

（のざき・あきひろ）

科学と社会

Science & Society

第2回　国家・学問・戦争の諸相

科学はどのようにして生まれたか

岡本　拓司

前回は，議論を主として現代の状況に絞って，学問としての科学を特徴づける方法が実験であることを確認した．今回は，こうした特徴をもつ科学が誕生した過程を検討する．

本連載が主題とするのは，主に日本の戦前期における科学と社会の関わりであるが，まずは科学の語で何を指しているかを明らかにするために前回は科学とは何であるかを論じた．今回，科学が生まれた過程を論ずるのは，科学がどこでどのようにして誕生したかを理解しておくことが，次回以降数回にわたって，科学が日本で受け入れられていった事情を検討するために必要だからである．「科学の誕生」といえば，通常は概要を論ずるのみでも本１冊以上を必要とする．今回はこれを数ページで終えようという無謀な試みを行うことになるが，あらかじめ何をもって科学の誕生と看做すのかを限定し，論点を絞っておくことで，ある程度は目的は達せられるものと思われる．まずいくつか，すぐに思い浮かぶ議論を手がかりにしながら，今回の目標を設定したい．

2.1 何をもって科学が生まれたというのか

前回，実験は技術（軍事技術，産業技術など）と共有する点が多いことを見た．科学が生まれた過程を問うとすれば，ではまず技術の現場から科学が生まれたのではないかという想像がなされ得る．試行錯誤の末に，帰納法的に，実地に基づいて獲得されていくという点では，技術の現場で蓄積される知識は科学に極めて近いもののように思われる．しかし，前回見たとおり，科学は学問に分類されるべきものである．技術そのものは学問ではない．現状を考えてみても，技術的な必要から特定の課題の解決が学問に求められたり，技術の現場の知識が学問に役立ったり，あるいは学問として固有の目的をもつ科学が領域拡大のために特定の技術を必要とすることはあっても，軍事や産業のための技術の現場で蓄積された知識が学問の一部を形成していくといった事態は考えにくい．歴史を見ても，技術の現場で，例えば職人たちが持っていた知識が，そのまま科学になっていったわけではない．学問の側から技術に歩み寄って，科学が生まれるというのが実際の経過である．

では学問の中で考えることとして，すると科学がどのように誕生したかという問いは，実験という方法を使った学問がいつどこで誕生したか，というものになる．現代の我々が，例えば小学校でも，ごく初歩的ながら実験を行って知識を得るという手続きを習得し得ることや，日常，よく分からないことは何度かやってみてその結果から学ぶ

という経験をごく普通にしていることを考えれば，学問の中においても，実験やそれに相当するものが使われないままでいると考えるのは不自然なように思われる．

実際，よく知られた例でも，伝説ではあるが，古くは風呂に入っていたアルキメデス（前287頃–前212頃）が浮力の原理を思いついたとされる例や，操作を伴う実験というよりは単なる測定の要素が大きいが，エラトステネス（前273–前194）が，太陽の南中時に鉛直に立てた棒とその影の長さの比を距離の離れた2地点で測定して地球の周の長さを求めた例などが知られている．また，8世紀から15世紀にかけて展開をみたアラビア文化圏での自然に関する学問的探求では，レンズなどの光学機器の使用や錬金術における化学反応の定量的な統御が行われており，そこには，「自然」と呼ばれる対象を人間の「操作」の結果に基づいて理解するという姿勢を見ることができる．中世のヨーロッパで実験や観察を重視したロジャー・ベーコン（1214–1294）もアラビア由来の自然観・学問観の影響下にあった[1]．

つまり，技術とは異なる学問の枠組みの中で，実験と呼び得る方法を探求や論証に用いる動きは，古代から，個人の単発的な思いつきをはるかに超える広がりで存在していたといえる．従って，実験を用いる学問がどのようにしてできたかという問いには，一応は，以上の例をもって応えることができそうである．特にアラビアの例は，人種的にも宗教的にも多様な人々の間で，実験を基盤とする学問が共有されていたことを示すものであり，前回の議論からいえば，そこには科学が存在していたといってほとんど構わないように思われる．よく知られている通り，科学に関わるヨーロッパの言葉の中には，アラビア語に語源を持つものも多い．

今日科学として流通している学問の枠組みは，しかし，事実として，ヨーロッパ起源である．アラビア語起源の言葉は科学の術語の中に現れはするが，それはこれらをヨーロッパの学問が採用したためである．科学は，具体的には，ヨーロッパで生まれ，産業革命・帝国主義期を経て，西洋が拡大するのとともに，世界各地に伝播していった．

ややわき道に逸れるが，すると一つの疑問が生ずる．前回，科学には他の学問とは異なる普遍性・客観性・再現性等があると論じたが，それは結局，西洋的な価値の体系が世界中に広まったために，そのように見えるというだけのことではないか，というものである．人権や民主主義が，それらを標榜する地域の価値観が世界中で優勢になると，あたかも時間や空間を越えて普遍的なものであるかのように見えるようになるのと同様，科学も西洋的価値体系の世界への浸透とともに普遍的に見えるようになったのであり，こうした性格は学問固有の方法によるものではないのではないか，という疑問である．

上の疑問については今回充分に議論することはできないので，日本における科学の受容を論ずる際に改めて取り上げよう．いまはただ，以下の点を指摘しておく．つまり，いろいろな地域で実験を用いた学問が誕生していたのであれば，それらが各地で独自の発展を遂げて各地固有の科学となり，西洋の科学がやってきた際にもそれとの習合や折衷があった，というようなことが観察されてよさそうであるが，そしてそのような現象は皆無であるというわけではないが，しかし，例えば日本では，こうした例は，同じ学問の中で見ても，倫理学・歴史学等に比べて科学では少ない，即ち科学は，日本の伝統にはなく，西洋由来の学問としての性格が強い，という点である．

であればますます科学の普遍性は世界の西洋化によるものではないかと疑われるが，これについてはやはり次回以降論ずる．ここでは，科学の誕生の過程を論ずるには，ヨーロッパで起きた出来事に注目する必要があることを主張したいのである．あるいは，こう言ってもよい．たとえ科学の「普遍性」が西洋の拡大によるものであったとしても，ではなぜ科学が西洋において，学問の，少なくとも代表的な成果の一つとなるほどの地位を得るに至ったのかは，やはり問題となり得る，と．

問題がやや明確になってきた．科学の誕生とは，

ひとまずは，ヨーロッパにおいて，科学が明らかに成功してみせたことを指す．具体的な出来事としては何か．それは，他の学問領域も模範とするような体系，つまりニュートン力学の誕生であり，さらに限定して示せば，『プリンキピア』(1687年)の刊行であったといって，まず誤りはなかろう．

やや科学史に詳しい人々は，ここでまた別の疑問を持たれるであろう．ニュートン力学は，古代からの伝統をもつ，理論や数学の成果として理解されるべきであり[2]，実験を用いる学問の誕生とは関わりがないのではないか，科学の特徴的な方法を実験であるとした議論がそもそも誤りだったのではないか——．なるほどそうかもしれない．しかし，このような疑問を手がかりに，議論をさらに絞ることができる．つまり，ニュートン力学の誕生の意味を，実験と学問の関わりという観点から検討すれば，科学の誕生についても，科学の特徴的な方法が本当に実験であるかどうかについても，明らかにできるであろう．以下ではこれらの問題について論ずる．

2.2 中世ヨーロッパの自然に関する学問

ニュートン力学誕生の議論に入る前に，それ以前の自然に関する学問がどのようなものであったかを瞥見しておこう．

科学の誕生以前のヨーロッパでは，学問的な自然観の根幹はアリストテレス（前384–前322）の自然学であった．この体系では，例えば土や水といった物体の落下運動は，物体が与えられた本来の場所である宇宙の中心，即ち地球に還ろうとするために起こると説明される．つまり，運動の説明は，宇宙の構造と結びついている．土や水が地球に還ろうとする性質は重さと呼ばれるが，この性質を多く持つものほど，つまり重いものほど，速く地球に向うことになる．土と水の他に，アリストテレスは火と空気，そして月より上の世界を構成するアイテールという元素を想定するが，火や空気は，よく観察される通り，宇宙の中心から離れる（つまり地球上で見れば上昇する）運動を自然に

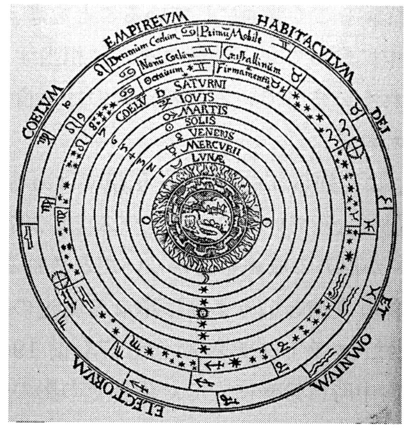


図 2.1　中世ヨーロッパの同心天球宇宙．ペトルス・アピアヌス『宇宙誌』，1539年．

起こす．これはこれらの元素が，軽さという性質を持っているからであると説明される．月，惑星，太陽，恒星などの天体はアイテールからなる天球に乗っており，軽さも重さもないエーテルにとっての自然な運動は回転運動なので，天球は地球を中心に回転する（同心天球宇宙）．同心天球宇宙では宇宙の中の場所にはそれぞれ意味があり，何もない空間があるとは考えられない．これを一つの理由として真空は存在しないとされた．

土・水・空気・火の四元素の他に，アリストテレスは冷・熱，乾・湿という対立する二組の性質，四性質も説明の原理に用いる．例えば水は冷・湿という性質を持っているが，熱を加えられると熱・湿という組合せをもつ空気（水蒸気）となって，上昇していく．四元素，四性質は人体の体液とも関わりをもつとされ，ここから医学論も導かれている．

宇宙論，物質論，医学や論理学，存在論も結びついているのがアリストテレスの体系の特徴である．この体系が説得的であったのは，ものは押せば動くといったよく知られている事柄を原理として用い，日常の出来事の注意深い観察に基づいていたためであり，また宇宙の構造から人生の目的に至るまでを一つの視野の中にまとめる体系性をもっていたためであった．実験に基づかなくとも，高い説得力を持つ自然に関する議論を作ることは可能である．これに宗教の力が加われば，その力が及ぶ範囲では，説得力はさらに増す．自然学を

含むアリストテレスの学問体系は，12 世紀以降アラビア世界からヨーロッパに紹介され，キリスト教と融合していわゆるスコラ学を形成した．

ただし，天文学においては，惑星の運動に関して，同心天球宇宙では説明しきれない観測結果があったため，地球を取り囲む円（導円）に沿って動く中心をもつ円（周転円）の上に惑星が乗り，周転円の中心の運動と周転円自体の回転によって惑星が運動するという仕組みを基本とし，それにいくかの修正を加えた，プトレマイオス（後 100 頃–170 頃）の説が用いられた．プトレマイオスがヨーロッパで広く紹介されていくのも 12 世紀以降のことである[3]．

科学が，自然に関する新たな学問として登場しようとしたとき，対峙しなければならなかった体系は以上のようなものであった．

2.3 地動説の登場

では，アリストテレス自然学への挑戦はどこからなされていったのか．いわゆるルネサンス，大航海時代，宗教改革を経た時期，幾つかの領域で従来の体系への疑義の提示が生じていたが，力学の誕生に至る出来事としては，まずコペルニクス（1473–1543）による地動説の発表（1543 年）があった．

太陽を中心として，地球などの惑星はその周りを回転し，水星や金星は地球より内側，火星，木星，土星はその外側にあるとするコペルニクスの地動説は，天文学の枠内で唱えられており，直接的にはプトレマイオス説への反駁であった．しかし同時に，地球の不動性を否定し太陽が宇宙の中心にあるとする地動説は，アリストテレスの宇宙像やそれをもとにする自然学への挑戦でもあった．地動説を受け入れるのであれば，旧来の宇宙構造論と緊密に結びつき，運動・物質・健康などを一つの体系で説明しつくすアリストテレスの自然学に代わる議論を示す必要があった．こうした検討の過程では，単にアリストテレス自然学の個々の内容が改訂されたのみならず，アリストテレスが用いた観察などの方法や，古代以来の権威に根拠を求める学問のあり方にも変革がもたらされることになった．

さらに大きな問題もあった．天動説には旧約聖書のヨシュア記中の記述による裏づけがあり，これへの対処は容易ではない．地動説を主張するのであれば，自然に関する学問と聖書の関わりをどう規定するかという，学問の根幹に関わる議論も避けて通れなかった．

他にも，大地が動いているとすれば空の鳥や雲が飛び去らないのはなぜか，あるいは，地球が公転しているとすれば観察されるべき恒星の年周視差が観測されないのはなぜかなど，地動説を支持する者たちには，多くの困難な課題を乗り越えることが要請された．

それでも地動説が支持を集めたのはなぜか．コペルニクス自身が地動説に至ったのは，プトレマイオス理論のように多くの例外的規則を持つ体系ではなく，天体に固有の理想的な一様円運動のみで天文学を作りたいという古典的ともいえる欲求からであったといわれるが，実際でき上がった地動説の魅力はまた別様のものであった．地動説では，①原理的には導円・周転円のように幾つもの円を使う必要がなく，また，②惑星の位置・距離・公転周期を，つまり太陽系の構造に関わる基本的な数字を，観測できる情報のみから算出することを保証している．実際に観測結果を説明しようとすると①は貫徹できず，多くの付加的な円が必要となったが，地動説が原理的に簡潔であることには変わりはない．また惑星の位置や並ぶ順序についてはプトレマイオスも議論はしたが，観測できる情報に基づかない前提（宇宙の中心から遠い惑星ほど公転の周期が大きくなるなどの，プトレマイオス説の枠内では説明できない前提）を取り入れる必要があった．

地動説の魅力は，その登場の段階では，新しい観測結果が得られた等の事情で生じたわけではなく，また地動説が天動説よりも観測結果を正確に説明していたわけでもなかった．地動説には，その理論体系自体に，より少ない前提でより多くの

情報を得たり説明したりすることを可能にするという魅力があり，これが，地球が動くという当時としては破天荒な前提にも関わらず，若干の野心的な若者たちをひきつけることとなった．

2.4 ティコ・ブラーエとケプラー

アリストテレス自然学は残しながら，地動説の利点のみを天文学の枠内の改良に用いる方法もあった．地球は宇宙の中心にあって不動であるが，その他の惑星は太陽の周りを回転し，太陽は惑星と共に地球の周りを回転するというものである．この説の代表的な主張者はティコ・ブラーエ（1546–1601）であったが，この説では，地球が運動していると想定すると生ずる困難は解消し，その一方で，太陽系の構造が確定できるなどの地動説の利点は保存される．聖書との対立も生じない．安全なティコ説の支持者は少なくなかった．

ティコの名は，しかし，彼の残した観測結果によってより広く知られている．巨大な四分儀の使用や，目盛りに対角線を引くなどの工夫によって，ティコは観測精度を上げることに成功した．天体から得られる情報の精度を，自身の観測装置の改良によって上げ，新しい知識を得て行く作業は，実験に極めて近い性格をもつともいえる．観測結果をもとに，ティコ自身，（超）新星の発見を論拠として，月より上の世界には変化は起こらない（不生不滅）とする古代の宇宙論の主張を否定し，彗星の運動から天球の存在を疑ってみせる議論を展開した．しかし，彼の残した膨大な観測結果は，死後，弟子のケプラー（1571–1630）によって解析され，さらに精緻な発見を生み出すことになる．

ケプラーは，大学でコペルニクスの地動説を知り，この説の簡潔な体系性の支持者となった．さらに，太陽と惑星の距離などの詳細を知るための手がかりを求めて，ティコの観測結果に関心をもった．ケプラーの研究は，宇宙を支配する数学的な原理を発見しようという意欲によって進められており，膨大な観測結果をうまく説明する関係を求めて様々な図形や関数を試した末，惑星の軌道は楕円であること（ケプラーの第一法則），惑星と太陽を結ぶ線が単位時間に掃く面積は一定であること（第二法則），惑星の周期は太陽からの平均距離の 3/2 乗に比例すること（第三法則）を発見した．

ティコとケプラーの組合せが生んだ成果は，人間の工夫によって観測の精度が上がり，そこから得られた従来よりも詳細な情報が，数字で表現される新たな知識を生み，さらにその知識の説得力の源ともなったことを示しており，実験（観測）に基づく学問としてほとんど申し分のない特徴を備えている．しかし，この時点までの成果は，そうした学問を広く定着させるほどの影響は持たなかった．新たな動きが受け入れられるまでには，より広い領域に影響を与える，より明確な成果が必要であった．

ティコとケプラーの議論の中にも，新たな学問に至る萌芽はあった．ティコの発見は，天上の世界が地上の世界を構成する物質と同じものでできているという見解をもたらした．ケプラーは，惑星の運動の源が何であるかを検討し，それは太陽が発する駆動力であると考えた．また，運動の原因に関わる議論から，ティコ説のような地球中心説は否定した．気づかれにくい特徴であるが，いずれも，当時の天文学者たちが，天上の世界を，地球上で確認できる原理から説明しようとする方向へと歩もうとしていたことを示している．

2.5 ガリレオ

地上の運動と天体の運動を同じ原理で説明しようと試みたのは，ガリレオ（1564–1642）であった．彼はまた，この作業を進める過程で，自然に関する学問の方法や目的についても大きな変革を提案することになる．

ガリレオは，1595 年頃から地動説の詳細を知り，潮汐に関する独自の発想からこれを支持していたとも言われるが[4]，最初に成果を挙げたのは落体の運動の研究においてであった．模範としたのは，当時翻訳や紹介が進んでいたアルキメデスであり，運動に関する議論などからアリストテレス自然学

に否定的な見解を深めていった．ガリレオ自身は行っていないが，ピサの斜塔の実験は，重さという性質をより多く持っているために，重いものほど早く落ちるとするアリストテレスの説を反駁するためのものである．人類の歴史の中に，重いものと軽いものを同時に落とした経験がなかったとは思われないが，その経験が学問に用いられるかどうかはまた別の問題である．ピサの斜塔の逸話が喧伝されたのは，こうした方法を学問に用いることが珍しかったためであろう．

ガリレオの発見した落体の法則は，すべての物体の落下の距離が，落下にかかった時間の自乗に比例するというものである．落体の研究は，実際には，観測が可能になるよう落下の速度を調整し得る，斜面の上を転がる球を用いて行われた．実験に先立って落体の法則が念頭にあった，つまり実験はあらかじめ想定された法則を確認するためのものであったとする見解が有力である[5)]．それにしても，実験とともにこの法則が提示されたことの意味は大きい．そこには，アリストテレスの権威ではなく，実際に行ってみて分かることを根拠に学問を進展させようという姿勢が明らかに示されている．

ガリレオを有名にし，同時に地上の物体の運動と天体の運動を同じ原理で論ずる方向へと向わせたのは，1609年から始まる，望遠鏡による天文観測である．ティコの得た結果は，精度はそれ以前のものより格段によかったが，古代以来の肉眼による観測の範囲内での成果である．これに対して，望遠鏡を覗けば肉眼では見えないものが現れる．具体的には，月面の凹凸，肉眼では見えなかった多くの恒星，木星の衛星，金星の満ち欠け，土星が三重星であること（実際には環をもっていること）などが発見され，地動説にとって有利な証拠が示されるとともに，天体のある世界が人間のいる世界と一続きの原理で支配されている可能性が明確にされた．

ガリレオの具体的な天体運動の説明は，円慣性と呼ばれる原理に基づくものである．ガリレオは，水平方向の等速運動は，自然でも強制でもない中立的運動であり，何も力が働かなければその状態が続くと考えた（地球上で水平面をつなげると円になるので円慣性と呼ばれる）．その上で，惑星の太陽を中心とする回転をこの円慣性で説明した．ケプラーとは交流があったが，惑星の軌道が楕円であることは認めていなかった．落体の法則の発見や，望遠鏡による天文観測の意義はそれぞれ大きく，また運動学と天文学を具体的に結び付けようと試みた点も重要であるが，ガリレオの段階では，この試みの成果は，天体の回転運動を地上の物体の運動の慣性から類推して説明するにとどまった．

新しい研究の方向を提示したガリレオは，学問の方法や目的に関する変革も主張した．アリストテレスが落下運動の原因まで説明しようとしたのに対し，ガリレオはその実際の様態の情報，具体的には数字で測ることのできる量（長さ，時間など）による表現をまず追求すべきであるとした．原因の探求は，実際に起こる運動に関する正確な知識が得られたあとで行われるべきであると考えたのである．彼はまた，古代からの権威によるのではなく，実際に行って確認できること（実験）を根拠とした議論を学問の方法とし，必要に応じて対象を加工して数字による情報を取り出し易くした[6)]．

ガリレオはまた，聖書は科学上の探求の根拠としては不適切な場合もあることも指摘した[7)]．こうした態度に基づく彼の研究により，危機を感じた宗教的権威によって，ガリレオ個人は裁判にかけられることともなった．科学が社会に波乱をひきおこしかねないものであることは，その誕生の当初から示されていたといえる．ただ，この学問は，他の異端的な言説とは異なって，望遠鏡による観測のように説得力の高い方法を採用していたために，社会の秩序を守ろうとする側の感ずる危機感も，それに応じていっそう強いものとなった．

2.6 ニュートン力学の誕生

地上の物体の運動の詳細は，デカルト（1596–1650）やホイヘンス（1629–1695）らによっても研究されたが，簡潔な3つの法則に基づく運動の

学（力学）に至り，さらに質量を持つ2つの物体の間では，それらの距離の自乗に反比例するという万有引力の法則を加えて天体の運動まで説明することに成功したのは，ニュートン（1642–1727）である．

ニュートンは，必要に応じて微分・積分などの数学的な道具立ても自分で作り出し，衝突の問題を複雑な例に拡張して解くことや，円運動で働く力の数学的な表現を得ることにも成功した．『プリンキピア』では，惑星の楕円軌道から，太陽との間に万有引力が働いていることが導かれ，これによって惑星・彗星などの天体の運動と，地上で起こる落下や潮汐の運動が説明される．多様な運動に，数学的に精密な説明を与えるニュートンの力学の説得力は大きく，当時まだそれほど信頼されていなかったケプラーの法則の正しさを認めさせるほどであった．

アリストテレスの体系では，宇宙論と運動学は密接に結びついていたが，それでも月から上の世界とその下の世界では，それぞれを支配する原理は異なっていた．ニュートン力学は，物質の構成や人体の健康までを議論するには至らなかったが，天体の運行と地上の物体の運動を同じ原理の下で説明することに成功した．やがては同じ原理によって，かつてアリストテレスの体系が説明し尽くしたことが，別の方法によってであれ解明されるに違いないという期待が現れても不思議はない．ただし，ニュートン力学は，その具体的内容のみならず，学問としての方法や目的もアリストテレスの体系とは大きく異なっていた．

万有引力の存在には，フック（1635–1703）なども気づいていた．しかし，運動の法則をまとめた上で万有引力の法則を用い，数学（幾何学）を駆使して惑星の運動に説明を与える能力をもった人物は，ニュートン以外にはいなかった．ニュートンが担当した，力学を完成させる最後の過程が，突出した理論的・数学的能力をもつ天才の頭脳の貢献を必要としたことは間違いない．またこの事情が，力学あるいは科学全体について，重要なのは理論や数学であって，実験の積み重ねではないという印象を与えたとしても無理はない．

2.7 ニュートン力学誕生の意義とその後の展開

理論体系としての力学ができ上がる過程では，ニュートンの特異な数学の能力が不可欠であったばかりか，今まで見た，コペルニクスからニュートンに至るまでの登場人物はみな，天上・地上の運動は数学によって記述されていると考える人々であったから，やはり科学は，あるいは少なくとも力学は，数学の導きで作られたように見えるかもしれない．しかし，注意すれば分かるとおり，新たな理論的試みの前には，もとになる情報を提供する観測や実験が蓄積されている．これは，理論的・数学的考察といっても，その材料となる数字の情報がなければ行いようがないことを考えれば当然である．これらの情報は，理論的検討の材料となり，また理論ができ上がったあとは，これを検証する，あるいはその説得力を主張するための証拠ともなった．

力学に関わる実験でも，最先端の研究には最先端の技術が必要であった．ガリレオの斜面の実験では時間を測る必要があるが，落体の実験では，水時計か歌が使われたといわれる．当時すでに時計は存在し，教会などで使われていたが，短時間を測るのに用いることはできず，その種の計時技術は実験者自身が工夫して得るほかなかった．

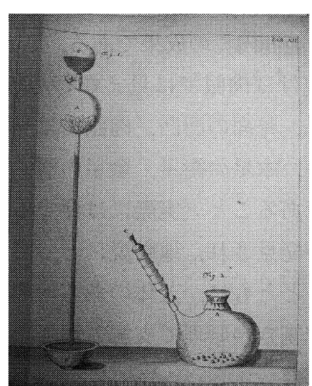


図 2.2　真空を用いた実験．アカデミア・デル・チメント『自然学実験論集』（1667 年）のラテン語訳（1757 年）より．

また，力学の誕生には，多くの場面で進んでいた，実験や観測の結果を学問に用いようとする動きが，うまくこの分野で有機的に結びつき，新しい学問の威力を明らかにする成果に至ったという側面もある．ティコの天文観測の精緻化や，ガリレオの斜面の実験や望遠鏡による天文観測は，最終的にニュートンがこれらを総合した成果を得なければ，別々の領域における異なる技術を用いた測定結果の蓄積と，それらに基づく個別領域の理論の確立に終わったことであろう．力学という成果の誕生に，直接的ではないが間接的に寄与した実験の成果としては，他に，ガリレオも僅かに関わった真空の発見がある（図 2.2）．しかし，力学という成果に関係を持たなかった多くの分野で，力学の完成と並行して，実験結果の蓄積がなされていた．具体的には，ニュートンも実験を行った光学，真空の発見以降進展した空気学，そしてこの時期以降にようやく定量的な測定の方法が確立して行く熱，電気，磁気などの分野における実験や，顕微鏡による微生物の観察，解剖による人体の構造の解明などである．これらの分野は，新たな実験を可能にする技術の登場や，それを受けた新たな理論的考察の飛躍を待って，次の段階へと進んで行くことになる．

科学という新たな学問では，アリストテレスのように「なぜ」という問いに答える試みは消え，ガリレオのように「いかに」という問いに関心が集中することとなった．実験の対象となる現象についても，詳細の分からないままたてた仮説に執着することはなくなった．ニュートンは，由来の明らかでなかった万有引力については「仮説をつくらない」と述べ，『光学』（1704 年）では，光の諸性質を仮説によって説明するのではなく，推論と実験によって提案し証明することを目的とすると宣言した．

科学は，アリストテレスの体系のように人生の目的や宇宙が存在する理由について答えてくれる学問ではないが，探求の材料や主張の根拠が必要なときには，いつでも実験を参照すればよいという性質をもつ．他の学問同様，理論的考察が実験を離れて進められることはあるが，それでも検証が必要な場面では実験の与える情報が基礎となる．ゲーテのように，人工的な器械による実験で自然の働きに関する証明を行うことを嫌う人々もいよう[8)]．しかし，反面，実験で検証を行う学問では，いったんその規則さえ認めてしまえば，人種・言語・文化・宗教などによらず議論に参加することが，原則としては可能である．実験という方法とともに，科学はそのような性格も獲得することとなった．

今回は，科学が実験を主要な方法に採用した学問として誕生し，一応の成功を遂げた過程を検討した．次回以降は，明治に入った日本が，この学問に対してどのような反応を示したかを議論したい．

参考文献

1) 伊東俊太郎『近代科学の源流』，中公文庫，2007 年．
2) Thomas S. Kuhn, “Mathematical versus Experimental Traditions in the Development of Physical Science,” in *The Essential Tension: Selected Studies in Scientific Tradition and Change* (Chicago and London: The University of Chicago Press, 1977), pp.31–65〔「物理科学の発達における数学的伝統と実験的伝統」，安孫子誠也・佐野正博訳『本質的緊張 1』，みすず書房，1987 年，47–88 ページ〕．
3) 高橋憲一訳・解説『コペルニクス・天球回転論』，みすず書房，1993 年．
4) 田中一郎『ガリレオ』，中公新書 1250，1995 年．
5) 高橋憲一『ガリレオの迷宮』，共立出版，2006 年．
6) 青木靖三編『世界の思想家 6 ガリレオ』，平凡社，1976 年．
7) Maurice A. Finocchiaro, *Defending Copernicus and Galileo: Critical Reasoning in the Two Affairs* (Dordrecht, Heidelberg, London, and New York: Springer, 2010).
8) 石原あえか『科学する詩人ゲーテ』，慶應義塾大学出版会，2010 年．

（おかもと・たくじ，東京大学大学院総合文化研究科）

編集後記

物理の様々な分野から数学まで，いろいろなところに“仮説”が登場しており，それぞれの分野からの解説が見られたのではないかと思います．

現実の社会でも様々に科学的な現象が存在し，どんな原因によって起きているのか，その後の結果はどうなるのだろうか，興味は尽きないことと思います．原因や結果を考えるときは，おそらく，こうなっているだろう，という“仮説”を立てて検証を進めていくかと思います．皆さんも身のまわりにある様々な現象がなぜ起こっているか，“仮説”を立てて，検証してみてはいかがでしょうか．

さて，小誌は一足先に年末を迎えます．今年は3月に起きた東日本大震災，また，7月の新潟・福島豪雨，9月の台風12号による豪雨など，自然のこわさを実感する年でした．また，震災に伴って起きた，原子力発電所の事故は科学のあり方や役割を考えさせるものであるように思いました．現在も様々な数値が発表されていますが，これらの数値を読み解くにはどうすればよいのか．読み解いた上でどうすべきなのか，この先はどうなるのか，それこそ場合によっては“仮説”を立てて，検証を進めていくことが必要になってくるのだと思います．来年の今頃には状況が少しでもよい方向に進んでいることを期待したいものです．　(R)

数　理　科　学　12月号

2011年12月1日発行

数理科学編集部　　　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 © 株式会社 **サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁